Mitta ja Integraali
Kevät 2015
2. tehtävät

Tärkein (ja oikeastaan ainoa) käsite, joka erottaa klassisen mitta/integrointi -teorian modernista on numeroituvuus. Siksi kannattaa nähdä vaivaa sen sisäistämisen eteen.

Tehtävä 1. Harjoittele numeroituvuuden käsitteen käyttöä ja osoita suoraan numeroituvuuden määritelmää käyttäen:

A) Jos joukko A on numeroituva ja on olemassa injektio $f : B \to A$, niin myös joukko B on numeroituva.

B) Jos joukko A on numeroituva ja on olemassa surjektio $g : A \to B$, niin myös joukko B on numeroituva.

C) Jos A on numeroituva ja $B \subset A$, niin B on numeroituva.

Tehtävä 2. Osoita:

A) Parillisten lukujen joukko $2\mathbb{N} := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ on numeroituva.

B) Potenssijoukko $P(\mathbb{R})$ on ylinumeroituva. (Etsi surjektio $g : P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tai injektio $f : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ ja käytä materiaalin tietoa, että $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva.)

C) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, eli lukujonojen joukko, eli funktioiden $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ joukko, on ylinumeroituva. (Cantorin diagonaaliargumentti!)

Tehtävä 3. Osoita:

A) Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Joukkoperhe $\{A \subset \mathbb{N} : A \text{ sisältää n kpl alkiota}\}$ on numeroituva.

B) $\mathbb{N}$:n äärellisten osajoukkojen perhe $\{A \subset \mathbb{N} : A \text{ sisältää äärellisen monta alkiota}\}$ on numeroituva.

C) $\{(q, p) \subset \mathbb{R} : q, p \in \mathbb{Q}, q < p\}$ on numeroituva. (Lisätieto: Tämä mielenkiintoinen esimerkki, koska kyseinen perhe muodostaa $\mathbb{R}$:n topologian n.s. kannan. Vaikka $\mathbb{R}$:ssä onkin ylinumeroituvasti avoimia joukkoa, niin tietyssä mielessä numeroituva kokoelma riittää määräämään sen.)

Tehtävä 4. Tämä tehtävä esittelee eräät hyödylliset operaatiot joukko-jonoille. Se tarjoaa myös erinomaista harjoitusta joukkomanipulaatioihin. Panosta tähän vaikka se tuntuisi haastavalta – erityisesti jos ja kun se tuntuu haastavalta!
Olkoon A_n avaruuden X osajoukko kaikilla $n = 1, 2, 3 \ldots$ Tällöin muodostamme joukot

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k, \quad \liminf_n A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k. \tag{1}$$

Näillä joukoilla on yksinkertainen tulkinta, joka auttaa ymmärtämään, miksi ne ovat käyttökelpoisia (katso seuraava tehtävä). Harjoittele kuitenkin ensin niiden käyttöä etsimällä lim sup ja lim inf erikoitapauksissa

A) $A_n = (a, b)$ kun n on parillinen ja $A_n = (c, d)$ kun n on pariton ja $a < b < c < d$.

B) $A_n = (-1/n, 1]$ kun n on parillinen ja $A_n = [-1, 1/n)$ kun n on pariton.

Osoita myös seuraavat perusominaisuudet.

C) $(\liminf_n A_n)^c = \limsup_n A_n^c$. (Vihje: De Morgan.)

D) $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.

Tehtävä 5. Osoita nyt edellisessä tehtävässä mainostetut hyödylliset tulkinnat:

A) $x \in \limsup_n A_n$ jos ja vain jos ”$x \in A_n$ äärettömän monella indeksillä n”.

B) $x \in \liminf_n A_n$ jos ja vain jos ”$x \in A_n$ jostakin $n = N$ lähtien (eli kun $n \geq N$)”.

Vilkaise nyt edellisen tehtävän esimerkkejä tämän uuden tulkinnan valossa.
Osoita viimeiseksi , että jos joukko-jono on joko kasvava ($A_n \subset A_{n+1}$) tai vähenevä ($A_n \supset A_{n+1}$), niin silloin pätee

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n. \tag{2}$$

(Tämä riittää tehdä kasvavassa tapauksessa, koska vähenevä seuraa silloin edellisen tehtävän C-kohdasta.)
[Kurssin loppupuolella käytämme näitä joukkoja kun annamme intuitiivisen tulkinnan Dominoidun Konvergenssin lauseelle (integrointiteorian käytännöllisin lause).]

Tehtävä 6. Tämä tehtävä kertoo jotakin tärkeää ”summien luonteesta”. Se myös selittää, miksi yleensä tutkitaan vain numeroituvia summia, eli indeksijoukoksi valitaan $\mathbb{N}$.
Olkoon I indeksijoukko (mahd. ylinumeroituva) ja $a_i \geq 0$ reaalilukuja. Osoita, että jos pätee

$$\sum_{i \in I} a_i < \infty, \tag{3}$$

niin silloin $\{i \in I : a_i > 0\}$ on numeroituva. Vihje: tutki joukkoja $\{i \in I : a_i > 1/n\}$.