Mitta ja Integraali
Kevät 2015
1. tehtävät
Viikko 3.

1. Lue luentomateriaalista *Käytännön joukko-oppia 0.1* kappale.

2. Mittateoriassa tutkitaan minkälaisille joukoille voidaan määrätä ”mitta”. Tämän vuoksi on välttämätöntä hallita joukko-operaatiota ja pientä manipulointia.
Sievennä[1] seuraavat joukot käyttäen täsmällisiä argumentteja.

A) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(n,\infty)$. (Tämä osoittaa, että joukkojen ääretön leikkaus voi olla tyhjä, vaikka jokainen äärellinen osaleikkaus $\bigcap_{n\le N}(n,\infty)=(N,\infty)$ olisi jopa ”äärettömän suuri”.)

B) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(x-1/n,x+1/n)$, missä $x\in\mathbb{R}$.

C) $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}}(n-\frac{1}{m},n+\frac{1}{m})$.

3. Osoita:

A) Jokainen joukko X voidaan esittää yksiöidensä yhdisteenä: $X=\bigcup_{x\in X}\{x\}$.

B) Jokainen avoin väli $(a,b), a<b$, voidaan esittää yhdisteenä suljetuista väleistä.

C) Jokainen suljettu väli $[a,b], a<b$, voidaan esittää leikkauksena avoimista väleistä.

D) Jokainen Reaalilukujen avoin osajoukko $U\subset\mathbb{R}$ voidaan esittää avoimien välien yhdisteenä seuraavasti: $U=\bigcup\{(a,b):a,b\in\mathbb{R},(a,b)\subset U\}$ ”yhdiste kaikista avoimista väleistä, jotka sisältyvät itse joukkoon U”.

4. Olkoon $U\subset\mathbb{R}$ ja $x\in R$. Luodaan erittäin kätevät määritelmät $U+x:=\{y+x:y\in U\}$ ja $U+V:=\bigcup_{x\in V}(U+x)$. Harjoittele tämän niin sanotun translaation käyttöä sieventämällä

A) $[0,1]+x$, missä $x\in\mathbb{R}$

B) $x+(0,1)$, missä $x\in\mathbb{R}$

C) $[0,1]+(0,1)$. (Vastaus: $(0,2)$.)

D) $\mathbb{N}-\mathbb{N}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{N}-n)$ (Vastaus: $\mathbb{Z}$.)

E) $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}=\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}+x)$

F) $\bigcup_{x\in[0,1]}(\mathbb{Q}+x)$ (Vastaus: $\mathbb{R}$.)

5 (4p)**.** Tämä tehtävä osoittaa, että kuvaus ei yleisesti ”kunnioita” leikkaus-operaatiota. (Alkukuva sen sijaan kunnioittaa, mikä tekee siitä mukavamman operaation mitta-teorian näkökulmasta.)
Olkoot X ja Y joukkoja, $f:X\to Y$ kuvaus niiden välillä ja $V_i\subset X,\ i\in I$, X:n osajoukkoja. Osoita, että

$$f\left(\bigcap_{i\in I}V_i\right)\subset\bigcap_{i\in I}f(V_i).$$

Osoita nyt, että inkluusio voi olla aito. (Ehkä yksinkertaisinta on valita jokin äärimmäisen alkeellinen asetelma, kuten $X=Y=\{x,y\}$...)

[1] Esimerkki ”sieventämisestä”: $\bigcup_{n=1}^{\infty}[-1+1/n,1-1/n]=(-1,1)$.

Osoita myös, että jos f on *injektio* niin silloin pätee yhtäsuuruus

$$f\left(\bigcap_{i\in I} V_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(V_i). \tag{1}$$