

Mått- och integrationsteori ¹²

Ilkka Holopainen

12 november 2012

¹Grundar sig främst på Tylli: Mitta ja integraali (2000) och Väisälä: Diff. Int. III (1985)

²Svensk översättning av Alexander Kainberg 2011, bearbetad av Mats Gyllenberg 2012. Om du hittar tryck- eller andra fel meddela Mats Gyllenberg mats.gyllenberg@helsinki.fi

1 Repetition och komplettering av förhandskunskaper

1.1 Praktisk mängdlära

Låt X vara en godtycklig mängd. Med *potensmängden till X* förstås mängden av alla delmängder till X . Den betecknas $\mathcal{P}(X)$. Vi har alltså

$$\mathcal{P}(X) = \{A: A \subset X\}.$$

En delmängd \mathcal{F} till $\mathcal{P}(X)$ kallas (*mängd*)familj. Unionen av mängdfamiljen $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ är

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in X: x \in A \text{ för något } A \in \mathcal{F}\}$$

och *snittet* är

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in X: x \in A \text{ för alla } A \in \mathcal{F}\}.$$

Låt \mathcal{A} vara en (index)mängd och antag att det mot varje $\alpha \in \mathcal{A}$ svarar en entydig delmängd $V_\alpha \subset X$, dvs. $\alpha \mapsto V_\alpha$ är en avbildning $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Då kallas familjen

$$\mathcal{F} = \{V_\alpha: \alpha \in \mathcal{A}\}$$

en *indexerad mängdfamilj* till X .

Unionen av en indexerad mängdfamilj är

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \{x \in X: x \in V_\alpha \text{ för något } \alpha \in \mathcal{A}\}$$

och på motsvarande sätt är *snittet*

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \{x \in X: x \in V_\alpha \text{ för alla } \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Vi betecknar även

$$\bigcup_{\alpha} V_\alpha \quad \text{och} \quad \bigcap_{\alpha} V_\alpha, \quad \text{om } \mathcal{A} \text{ framgår av sammanhanget.}$$

Exempel 1.2. 1. Låt $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Vi kan tolka \mathcal{F} som en indexerad mängdfamilj genom att använda \mathcal{F} självt som indexmängd. Om $\alpha \in \mathcal{F}$ (dvs. om α är en delmängd av X), så betecknar vi $V_\alpha = \alpha$. Då gäller att $\mathcal{F} = \{V_\alpha: \alpha \in \mathcal{F}\}$.

2. Den delmängd till X som innehåller bara ett element, nämligen x , betecknas $\{x\}$. Då är

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}.$$

Om indexmängden är $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ betecknar man ofta unionen $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ enklare

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \quad \text{eller} \quad \bigcup_n V_n,$$

och på motsvarande sätt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \quad \text{eller} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \quad \text{eller} \quad \bigcap_n V_n.$$

Beteckningarna (V_n) , $(V_n)_{n=1}^{\infty}$, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, och V_1, V_2, \dots avser *följder* (av mängder).
Differensen mellan mängderna $A, B \subset X$ är

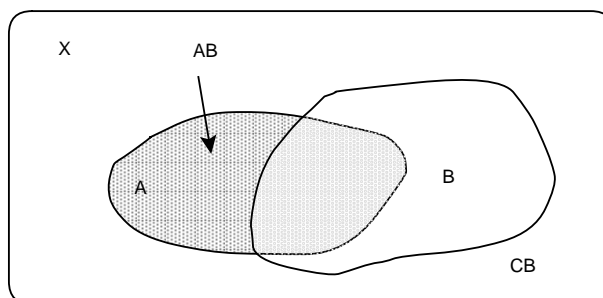
$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ och } x \notin B\}.$$

Komplementet till B (med avseende på X) är

$$B^c = X \setminus B.$$

Anmärkning 1.3.

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$



Sats 1.4. Låt $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}(X)$ vara en *mängdfamilj*. Då gäller de Morgans lagar:

$$(1.5) \quad \left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \right)^c = \bigcap_{\alpha} V_{\alpha}^c$$

och

$$(1.6) \quad \left(\bigcap_{\alpha} V_{\alpha} \right)^c = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}^c.$$

Låt $B \subset X$. Då gäller de s.k. distributiva lagarna för union och snitt:

$$(1.7) \quad B \cap \left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha} (B \cap V_{\alpha})$$

och

$$(1.8) \quad B \cup \left(\bigcap_{\alpha} V_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha} (B \cup V_{\alpha}).$$

Bevis. (1.5):

$$x \in \left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \right)^c \iff x \notin \bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \iff \forall \alpha : x \notin V_{\alpha} \iff \forall \alpha : x \in V_{\alpha}^c \iff x \in \bigcap_{\alpha} V_{\alpha}^c.$$

(1.6): På liknande sätt.

(1.7):

$$\begin{aligned} x \in B \cap \left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \right) &\iff x \in B \text{ och } x \in \bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \iff x \in B \text{ och } x \in V_{\alpha} \text{ f\u00f6r n\u00e5got } \alpha \in \mathcal{A} \\ &\iff x \in B \cap V_{\alpha} \text{ f\u00f6r n\u00e5got } \alpha \in \mathcal{A} \iff x \in \bigcup_{\alpha} (B \cap V_{\alpha}). \end{aligned}$$

(1.8): P\u00e5 liknande s\u00e4tt. □**Bilder och Urbilder av unioner/snitt i en m\u00e4ngdfamilj.**L\u00e5t X och Y vara icke-tomma m\u00e4ngder och $f: X \rightarrow Y$ en avbildning.*Bilden* av $A \subset X$ (under avbildningen f) \u00e4r

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset Y.$$

Vi betecknar kortare fA .*Urbilden* av $B \subset Y$ (under avbildningen f) \u00e4r

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Vi betecknar kortare $f^{-1}B$. Vi anv\u00e4nder \u00e4ven beteckningen

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}),$$

n\u00e4r $y \in Y$. [Obs.: f beh\u00f6ver inte ha en invers.]**Sats 1.9.** L\u00e5t $f: X \rightarrow Y$, $\{V_{\alpha} : \alpha \in \mathcal{A}\}$ en m\u00e4ngdfamilj i X och $\{W_{\beta} : \beta \in \mathcal{B}\}$ en m\u00e4ngdfamilj i Y . D\u00e5 g\u00e4ller

$$(1.10) \quad f\left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} fV_{\alpha}$$

$$(1.11) \quad f^{-1}\left(\bigcup_{\beta} W_{\beta}\right) = \bigcup_{\beta} f^{-1}W_{\beta}$$

$$(1.12) \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\beta} W_{\beta}\right) = \bigcap_{\beta} f^{-1}W_{\beta}.$$

Bevis. (1.10):

$$\begin{aligned} y \in f\left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha}\right) &\iff y = f(x) \text{ och } x \in \bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \iff y = f(x) \text{ och } x \in V_{\alpha} \text{ f\u00f6r n\u00e5got } \alpha \in \mathcal{A} \\ &\iff y \in fV_{\alpha} \text{ f\u00f6r n\u00e5got } \alpha \in \mathcal{A} \iff y \in \bigcup_{\alpha} fV_{\alpha}. \end{aligned}$$

(1.11) och (1.12): P\u00e5 liknande s\u00e4tt. □**Anm\u00e4rkning 1.13.** Det g\u00e4ller alltid att

$$f\left(\bigcap_{\alpha} V_{\alpha}\right) \subset \bigcap_{\alpha} fV_{\alpha},$$

men inklusionen kan vara \u00e4kta. Likheten $f(\cap_{\alpha} V_{\alpha}) = \cap_{\alpha} fV_{\alpha}$ g\u00e4ller t.ex. om f \u00e4r en injektion.

Uppräkneliga och ouppräkneliga mängder.

Uppräknelighet är mycket viktigt inom måtteori!

Definition 1.14. Mängden A är *uppräknelig* om $A = \emptyset$ eller om \exists injektion $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ ($\iff \exists$ surjektion $g: \mathbb{N} \rightarrow A$).

A är *ouppräknelig* om A inte är uppräknelig.

Anmärkning 1.15. 1. A är uppräknelig $\iff A$ är ändlig (inklusive \emptyset) eller *uppräkneligt oändlig* (\exists bijektion $f: A \rightarrow \mathbb{N}$).

2. $A \neq \emptyset$ är uppräknelig $\iff A = \{x_n: n \in \mathbb{N}\}$ (upprepning tillåten, d.v.s. A kan vara ändlig).

3. A är uppräknelig, $B \subset A \Rightarrow B$ är uppräknelig.

Sats 1.16. Om mängderna A_n är uppräkneliga $\forall n \in \mathbb{N}$, så är

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ uppräknelig.}$$

(D.v.s. "en uppräknelig union av uppräkneliga mängder är uppräknelig".)

Bevis. Antag att $A_n \neq \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$. A_n är uppräknelig $\Rightarrow A_n = \{x_m(n): m \in \mathbb{N}\}$. Definiera avbildningen

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_n A_n, \quad g(n, m) = x_m(n).$$

Då är g en surjektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_n A_n$. Det räcker att hitta en surjektion $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ty då är

$$g \circ h: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

en surjektion och därmed är $\bigcup_n A_n$ uppräknelig. Ett exempel på en surjektion är $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\begin{array}{cccccc} (1, 1) & & (1, 2) & & (1, 3) & & (1, 4) & & (1, 5) & \dots \\ =h(1) & & =h(3) & & =h(6) & & =h(10) & & =h(15) & \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\ (2, 1) & & (2, 2) & & (2, 3) & & (2, 4) & & & \\ =h(2) & & =h(5) & & =h(9) & & =h(14) & & & \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & \\ (3, 1) & & (3, 2) & & (3, 3) & & & & & \\ =h(4) & & =h(8) & & =h(13) & & & & & \\ & \nearrow & & \nearrow & & & & & & \\ (4, 1) & & (4, 2) & & & & & & & \\ =h(7) & & =h(12) & & & & & & & \\ & \nearrow & & & & & & & & \\ (5, 1) & & & & & & & & & \\ =h(11) & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & \end{array}$$

□

Följd 1.17. Mängden av de rationella talen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

är uppräknelig. Orsak: Mängden

$$A_k = \left\{ \frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0, |m| \leq k, |n| \leq k \right\}$$

är ändlig (och därav uppräknelig) $\forall k \in \mathbb{N}$. Sats 1.16 $\Rightarrow \mathbb{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ uppräknelig. □

Exempel 1.18. (En ouppräknelig mängd). Intervallet $[0, 1]$ är ouppräkneligt (härav följer att också mängden \mathbb{R} av alla reella tal är ouppräknelig).

Idé: $x \in [0, 1] \Rightarrow x$ har en decimalutveckling

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots,$$

där $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Antites: $[0, 1]$ är uppräknelig, varav $[0, 1] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Punkterna x_n har decimal-utvecklingarna

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \dots \\ x_2 &= 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \dots \\ x_3 &= 0, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \dots \\ &\vdots \\ x_n &= 0, a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)} \dots a_n^{(n)} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

På "diagonalen" finns talföljden $a_1^{(1)}, a_2^{(2)}, a_3^{(3)}, \dots, a_n^{(n)}, \dots$, där $a_n^{(n)} = n$:te decimalen i x_n . Definiera talet $x \in [0, 1]$ genom $x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$, där

$$(1.19) \quad b_n = \begin{cases} a_n^{(n)} + 2, & \text{om } a_n^{(n)} \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}, \\ a_n^{(n)} - 2, & \text{om } a_n^{(n)} \in \{8, 9\}. \end{cases}$$

Den n :te decimalen till talet x uppfyller $|b_n - a_n^{(n)}| = 2 \forall n \in \mathbb{N}$, så $x \neq x_n \forall n \in \mathbb{N}$. Detta strider mot antagandet, ty $[0, 1] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. $[0, 1]$ är alltså ouppräkneligt.

[Obs. Decimalutvecklingen är inte entydig: t.ex. $0, 5999 \dots = 0, 6000 \dots$ (detta kan vi se med hjälp av en geometrisk serie). Detta spelar ingen roll för beviset, ty i (1.19) är $b_n = a_n^{(n)} \pm 2$.]

Summering.

Låt $\mathcal{A} \neq \emptyset$ vara en godtycklig indexmängd och $a_\alpha \geq 0 \forall \alpha \in \mathcal{A}$. Fråga: Vad betyder

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha?$$

Definition.

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} a_\alpha \mid \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A} \text{ ändlig} \right\}.$$

Vi återkommer senare till detta.

1.20 Euklidiska rummet \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^{n \text{ st}} \quad \text{kartesisk produkt}$$

Element kallas *punkter* eller *vektorer*.

$$x \in \mathbb{R}^n \iff x = (x_1, \dots, x_n), \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Algebraisk struktur.

Summan av punkterna $x, y \in \mathbb{R}^n$ är

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Produkten av det reella talet $\lambda \in \mathbb{R}$ och punkten $x \in \mathbb{R}^n$ är

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nollvektorn

$$0 = \bar{0} = (0, \dots, 0).$$

Motvektorn till punkten $x \in \mathbb{R}^n$ är

$$-x = (-1)x = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Differensen mellan punkterna $x, y \in \mathbb{R}^n$ är

$$x - y = x + (-y).$$

I \mathbb{R}^n uppfyller summan och multiplikation med ett reellt tal villkoren för ett *vektorrum* (Lin.alg.I), t.ex. gäller det att

$$\begin{aligned} x + y &= y + x, & x + 0 &= 0 + x = x, \\ \lambda(x + y) &= \lambda x + \lambda y, & (\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x \quad \text{osv.} \\ & & \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. & \end{aligned}$$

Inre produkten av vektorerna $x, y \in \mathbb{R}^n$ är

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

Vi betecknar

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{i=1}^n x_i x_i \right)^{1/2} \quad \text{normen av } x.$$

Euklidiska avståndet i \mathbb{R}^n

Avståndet mellan punkterna $x, y \in \mathbb{R}^n$ är

$$|x - y| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Ofta betecknas $d(x, y) = |x - y|$. Då är d en *metrik* i \mathbb{R}^n , d.v.s. avbildningen $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uppfyller villkoren för en metrik:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ d(x, y) &= 0 \iff x = y \\ d(x, y) &= d(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \quad (\text{triangelolikheten, } \triangle). \end{aligned}$$

Öppna och slutna mängder i \mathbb{R}^n . (Vektoranalys, Topo I)

Den euklidiska metriken d definierar öppna och slutna mängder i \mathbb{R}^n (och därav topologin i \mathbb{R}^n):

Låt $x \in \mathbb{R}^n$ och $r > 0$. Mängden

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$$

är ett *öppet klot* (med medelpunkten x och radien r) och

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$$

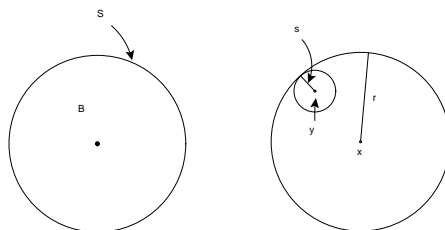
är en *sfär* (med medelpunkten x och radien r). På motsvarande sätt är

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\}$$

ett *slutet klot* (med medelpunkten x och radien r).

Mängden $V \subset \mathbb{R}^n$ är *öppen* om $\forall x \in V \exists r = r(x) > 0$ s.a. $B(x, r) \subset V$.

Mängden $V \subset \mathbb{R}^n$ är *sluten* om komplementmängden $\mathbb{R}^n \setminus V$ är öppen.



Exempel 1.21. 1. $B(x, r)$ är öppen $\forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ (Δ , se bilden ovan).

2. Ett slutet klot $\bar{B}(x, r)$ är en sluten mängd.

3. \mathbb{R}^n och \emptyset är både öppna och slutna.

4. Halvöppna intervall, t.ex. $[0, 1) \subset \mathbb{R}$, är varken öppna eller slutna.

Anmärkning 1.22. Det slutna höljet till mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ är

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A \text{ eller } x \text{ är en hopningspunkt till } A\}.$$

Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ är en hopningspunkt till mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ om $\forall r > 0$ gäller att $B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. I \mathbb{R}^n gäller det att $\bar{B}(x, r) = \overline{B(x, r)}$.

Anmärkning 1.23. Om (X, d) är ett *metriskt rum*, d.v.s. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ uppfyller villkoren för en metrik, så kan man definiera de öppna och slutna mängderna i X (med avseende på d) som tidigare genom att ersätta $|y - x|$ med metriken $d(x, y)$.

Följande resultat gäller allmänt:

Sats 1.24. Låt \mathcal{A} vara en godtycklig indexmängd. Då gäller att

$$(1.25) \quad V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ öppen } \forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \text{ öppen};$$

$$(1.26) \quad V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ sluten } \forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \text{ sluten};$$

$$(1.27) \quad V_1, \dots, V_k \subset \mathbb{R}^n \text{ öppna} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^k V_j \text{ öppen};$$

$$(1.28) \quad V_1, \dots, V_k \subset \mathbb{R}^n \text{ slutna} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^k V_j \text{ sluten.}$$

Bevis. (Topo I) (1.25):

$$x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \in \mathcal{A} \text{ s.a. } x \in V_{\alpha_0},$$

$$V_{\alpha_0} \text{ öppen} \Rightarrow \exists \text{ öppet klot } B(x, r) \subset V_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha.$$

(1.26):

$$V_\alpha \text{ sluten } \forall \alpha \Rightarrow V_\alpha^c \text{ öppen } \forall \alpha$$

$$\stackrel{(1.25)}{\implies} \bigcup_{\alpha} V_\alpha^c \stackrel{\text{de Morg.}}{=} \left(\bigcap_{\alpha} V_\alpha \right)^c \text{ öppen}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{\alpha} V_\alpha \text{ sluten.}$$

(1.27) och (1.28): Övningsuppgift. □

Anmärkning 1.29.

$$V_j \text{ öppen } \forall j \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \text{ öppen,}$$

$$V_j \text{ sluten } \forall j \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \text{ sluten. (Övningsuppgift)}$$

2 Lebesguemått i \mathbb{R}^n

2.1 Inledning

Geometrisk utgångspunkt: Om $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ är ett begränsat intervall, så är dess längd

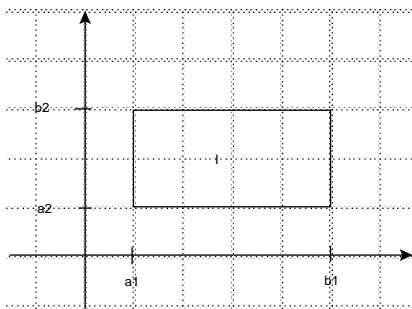
$$\ell(I) = b - a.$$

(Samma om I är öppet eller halvöppet.)

Mängden $I \subset \mathbb{R}^n$ är ett n -intervall om den är av formen

$$I = I_1 \times \dots \times I_n,$$

där varje $I_j \subset \mathbb{R}$ är ett intervall (antingen öppet, slutet eller halvöppet).



I är ett öppet (motsvarande slutet) n -intervall om varje I_j är öppet (motsvarande slutet).

Låt ändpunkterna till I_j vara a_j, b_j ; $a_j < b_j$. Då är det *geometriska måttet* av I

$$\ell(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

($n = 1$ längd, $n = 2$ area, $n = 3$ volym). Beteckna $\ell(\emptyset) = 0$.

Målet är att definiera ett "mått", det vill säga en avbildning

$$m_n: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty],$$

som uppfyller följande villkor:

- (1) \mathcal{M} är en så stor delmängd av $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ som möjligt.
- (2) $m_n(E) \geq 0$ för alla $E \in \mathcal{M}$ och $m_n(\emptyset) = 0$.
- (3) Varje n -intervall I hör til \mathcal{M} och $m_n(I) = \ell(I)$.
- (4) Om $\{E_k\}$ är en *disjunkt* (d.v.s. $E_j \cap E_k = \emptyset$ då $j \neq k$) familj av mängder i \mathcal{M} , så är

$$m_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m_n(E_k) \quad \text{"}\sigma\text{-additivitet"}$$

- (5) m_n är *translationsinvariant*, d.v.s. om $E \in \mathcal{M}$ så gäller $x + E \in \mathcal{M}$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$ och

$$m_n(x + E) = m_n(E).$$

Här är $x + E = \{x + y \mid y \in E\}$.

Det visar sig att man inte kan definiera ett mått som uppfyller (2) – (5) för $\mathcal{M} = \mathbb{R}$. Vi kommer att definiera (det n -dimensionella) Lebesgueåttet m_n som en avbildning

$$m_n: \text{Leb } \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty],$$

där

$$\text{Leb } \mathbb{R}^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

$\text{Leb } \mathbb{R}^n$ kallas familjen av *Lebesguemätbara* mängder. Den innehåller bl.a. alla öppna och slutna mängder.

2.2 Yttre Lebesguemått i \mathbb{R}^n

Överenskommelse.

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty + a = \infty, & a \neq -\infty \\ a - \infty &= -\infty + a = -\infty, & a \neq \infty \\ \infty - \infty, & -\infty + \infty & \text{inte definierat} \\ -(\infty) &= -\infty, & -(-\infty) = \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \infty \cdot a = a \cdot \infty &= \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases} & \text{Obs! } 0 \cdot \infty = 0 \\ (-\infty)a = a(-\infty) &= \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \infty \cdot \infty &= (-\infty)(-\infty) = \infty \\ (-\infty)\infty &= \infty(-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{0} &= \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ \text{inte definierat}, & a = 0 \end{cases} \\ \frac{a}{\infty} &= \frac{a}{-\infty} = 0, & a \in \mathbb{R} \\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty} & \text{inte definierat} \end{aligned}$$

Varning: överenskommelsen $0 \cdot \infty = 0$ kan inte användas för att beräkna gränsvärden $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k y_k$ i situationer där $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \infty$. Man får alltså inte dra slutsatsen att $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k y_k = (\lim_{k \rightarrow \infty} x_k)(\lim_{k \rightarrow \infty} y_k) = 0 \cdot \infty = 0$.

Påminnelse: Om $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ är en följd s.a. $a_j \geq 0 \forall j$, så är antingen

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k a_j \in \mathbb{R} \quad \text{eller} \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j = +\infty.$$

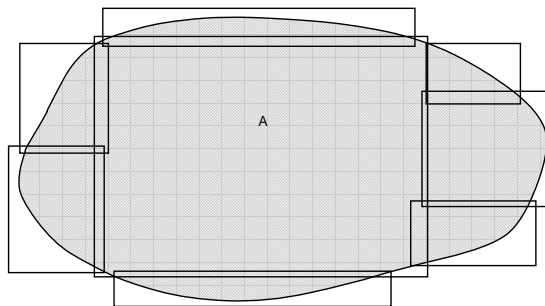
Orsak: delsummorna $\sum_{j=1}^k a_j$ bildar en växande följd.

Låt $A \subset \mathbb{R}^n$. Betrakta *uppräknliga öppna övertäckningar* till A (ev. ändliga)

$$\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \dots\},$$

där varje $I_k \subset \mathbb{R}^n$ är ett begränsat och öppet n -intervall (eller \emptyset) och

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$



Vi säger att \mathcal{F} är en *Lebesgue-övertäckning* till A . Vi bildar summan¹

$$S(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k), \quad 0 \leq S(\mathcal{F}) \leq +\infty.$$

Definition 2.3. Det n -dimensionella yttre (Lebesgue)måttet av mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ är

$$m_n^*(A) = \inf \{S(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ är en Lebesgue-övertäckning till } A\}.$$

(Vi visar senare att även slutna n -intervall duger i övertäckningen.)

Anmärkning 2.4. 1. Beteckna $J_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < k \forall j\}$ (öppet n -intervall). Självfallet är

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k,$$

så \exists alltid öppna övertäckningar $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset A$ (och därav existerar inf).

2. $I_k \subset \mathbb{R}^n$ öppet n -intervall $\Rightarrow 0 \leq \ell(I_k) < \infty \Rightarrow$ summan existerar och

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leq +\infty.$$

3. Det yttre måttet $m_n(A)$ beror (förstås) på dimensionen n . Om n framgår av sammanhanget betecknar vi kortare $m^*(A) = m_n^*(A)$.

4. Ur definitionen följer direkt att: $\forall \varepsilon > 0 \exists$ Lebesgue-övertäckning \mathcal{F} till A , (som ofta beror på ε) så att

$$S(\mathcal{F}) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

(Vi tillåter $m^*(A) = +\infty$.) Definitionen innebär inte att man (alltid) kan hitta en Lebesgue-övertäckning \mathcal{F} till A , där $m_n^*(A) = S(\mathcal{F})$.

5. Alltså: $A \mapsto m^*(A)$ är en avbildning $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, speciellt är m^* definierad i hela $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Exempel 2.5. 1. Låt $n = 2$ och låt $A = \{(x, 0) : a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$.

Påstående: $m_2^*(A) = 0$.

Bevis. Låt $\varepsilon > 0$ och $I_\varepsilon =]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R}^2$ vara ett öppet 2-intervall.

$$A \subset I_\varepsilon \Rightarrow 0 \leq m_2^*(A) \leq \ell(I_\varepsilon) = 2\varepsilon(b - a + 2\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

alltså är $m_2^*(A) = 0$.

¹Egentligen är $S(\mathcal{F})$ en missvisande beteckning, ty \mathcal{F} är en mängd. Överenskommelse: Varje n -intervall i \mathcal{F} indexerar endast en gång, varav det geometriska måttet för varje n -intervall inkluderas exakt en gång i summan $S(\mathcal{F})$.

2. Låt $n = 1$. Betrakta de rationella talen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Påstående: $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Bevis. \mathbb{Q} är uppräknelig, alltså är $\mathbb{Q} = \{q_j : j \in \mathbb{N}\}$. Låt $\varepsilon > 0$ vara godtyckligt. För varje $j \in \mathbb{N}$ låter vi

$$I_j =]q_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, q_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}[\subset \mathbb{R}$$

vara ett öppet intervall. Dess längd är $\ell(I_j) = 2\varepsilon/2^{j+1} = \varepsilon/2^j$.

$$q_j \in I_j \quad \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q} \subset \bigcup_j I_j \Rightarrow$$

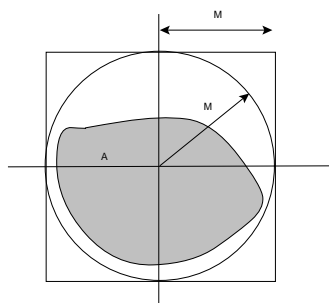
$$0 \leq m_1^*(\mathbb{Q}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

alltså är $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$.

3. $A \subset \mathbb{R}^n$ uppräknelig $\Rightarrow m_n^*(A) = 0$ (Som i 2.)

4. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara en *begränsad* mängd, d.v.s. $\exists R > 0$ s.a. $A \subset B(0, R)$. Då är $A \subset I$, där

$$I =]-R, R[\times \cdots \times]-R, R[\text{ är ett öppet } n\text{-intervall.}$$



Vi får uppskattningen

$$m^*(A) \leq \ell(I) = (2R)^n.$$

Yttre (Lebesgue)måttets egenskaper.

Sats 2.6. (1) $m_n^*(\emptyset) = 0$;

(2) Det yttre måttet m_n^* är monotont: $A \subset B \Rightarrow m_n^*(A) \leq m_n^*(B)$;

(3) Det yttre måttet m_n^* är subadditivt: För en godtycklig följd av mängder $A_1, A_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ gäller

$$m_n^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j).$$

Anmärkning 2.7. (3) gäller även för ändliga unioner $\cup_{j=1}^k (A_j)$ (välj $A_{k+1} = \dots = \emptyset$).

Bevis.

(1): Klart.

(2): Låt \mathcal{F} vara en Lebesgue-övertäckning till B .

$$A \subset B \Rightarrow \mathcal{F} \text{ är också en Lebesgue-övertäckning till } A \stackrel{\text{def.}}{\implies} m_n^*(A) \leq S(\mathcal{F}).$$

Vi tar inf över alla Lebesgue-övertäckningar till $B \Rightarrow m_n^*(A) \leq m_n^*(B)$.

(3): Beteckna $A = \cup_j A_j$. Låt $\varepsilon > 0$. För varje j väljer vi Lebesgue-övertäckningen $\mathcal{F}_j = \{I_{j1}, I_{j2} \dots\}$ till A s.a.

$$S(\mathcal{F}_j) \leq m_n^*(A_j) + \varepsilon/2^j.$$

Nu är $\mathcal{F} = \cup_j \mathcal{F}_j = \{I_{jk} : j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ en Lebesgue-övertäckning till A .

$$\stackrel{\text{def.}}{\implies} m_n^*(A) \leq S(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{\infty} S(\mathcal{F}_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon/2^j = \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j) + \varepsilon.$$

Låt $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow$ påståendet.

□

Anmärkning 2.8. Ovan behövde vi summeringsteori (ekvationen $S(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{\infty} S(\mathcal{F}_j)$). Se Lemma 2.13 och 2.14 nedan.

Sats 2.9. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$. Då gäller

$$(2.10) \quad m_n^*(A+x) = m_n^*(A)$$

för alla $x \in \mathbb{R}^n$, där $A+x = \{y+x : y \in A\}$;

$$(2.11) \quad m_n^*(tA) = t^n m_n^*(A),$$

då $t > 0$, där $tA = \{ty : y \in A\}$.

Bevis. (Övningsuppgift)

□

Summeringsteori. Låt I vara en (index)mängd och $a_i \geq 0 \forall i \in I$. Om $J \subset I$ är ändlig betecknar vi

$$S_J = \sum_{i \in J} a_i, \quad S_{\emptyset} = 0.$$

Definition 2.12.

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup\{S_J : J \subset I \text{ ändlig}\}.$$

Lemma 2.13.

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i,$$

d.v.s. Definition 2.12 är ekvivalent med den gängse definitionen för summan av en serie (Analys I).

Bevis. Beteckna $J_n = \{1, \dots, n\}$, $S = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i$ ($= \sup\{S_J : J \subset \mathbb{N} \text{ ändlig}\}$).

$$\begin{aligned} (S_{J_n}) \text{ växande följd} &\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{J_n} = S' \\ S_{J_n} \leq S &\Rightarrow S' \leq S. \end{aligned}$$

å andra sidan

$$\begin{aligned} J \subset \mathbb{N} \text{ ändlig} &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.a. } J \subset J_n \\ &\Rightarrow S_J \leq S_{J_n} \leq S' \\ \Rightarrow S &\leq S' \quad (\text{genom att ta sup över } \forall J). \end{aligned}$$

□

I följande lemma är både I och J godtyckliga indexmängder. (Vi betecknar även kortare $a_{ij} = a_{(i,j) \cdot}$)

Lemma 2.14.

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij}.$$

Bevis. Vi betecknar $S^v =$ vänstra summan, $S^m =$ summan i mitten och $S^h =$ högra summan.

(a): Om $\mathcal{A} \subset I \times J$ är ändlig så \exists ändliga $I' \subset I$, $J' \subset J$ s.a. $\mathcal{A} \subset I' \times J'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{\mathcal{A}} &\leq S_{I' \times J'} \stackrel{(*)}{=} \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J'} a_{ij} \leq \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J} a_{ij} \leq S_m \\ \Rightarrow S^v &\leq S^m \quad (\text{genom att ta sup över } \forall \mathcal{A}). \end{aligned}$$

[(*): summan $S_{I' \times J'}$ har ändligt många termer så summeringsordningen spelar ingen roll.]

(b): Låt $I' \subset I$ och $J'_i \subset J$ vara ändliga $\forall i \in I'$. Beteckna

$$\mathcal{A} = \{(i, j) : i \in I', j \in J'_i\}.$$

Då gäller att

$$S^v \geq S_{\mathcal{A}} = \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J'_i} a_{ij}.$$

Vi tar ($\forall i \in I'$) sup över de ändliga $J'_i \subset J$

$$\begin{aligned} S^v &\geq \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J} a_{ij} \\ \text{sup över de ändliga } I' \subset I &\Rightarrow S^v \geq S^m. \end{aligned}$$

Vi har nu visat att $S^v \geq S^m$.

Likheten $S_v = S_h$ bevisas på motsvarande sätt. □

Korollarium 2.15.

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} a_{ij}.$$

Anmärkning 2.16. Subadditivitet gäller (oftast) inte i formen

$$(2.17) \quad m_n^* \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \leq \sum_{i \in I} m_n^*(A_i),$$

där $A_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$ och I är en *ouppräknelig* indexmängd. Orsak:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \{x\}, \quad m_n^*(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Om (2.17) gällde så vore

$$0 \leq m_n^*(\mathbb{R}^n) = m_n^* \left(\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \{x\} \right) \stackrel{(2.17)}{\leq} \sum_{x \in \mathbb{R}^n} m_n^*(\{x\}) = 0.$$

Å andra sidan så är det uppenbart att $m_n^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$ (detta följer också omedelbart av Lemma 2.36 som bevisas senare). Detta visar att (2.17) inte gäller.

2.18 (Lebesgue)mätbara mängder

Vi definierar (Lebesgue-)mätbara mängder i \mathbb{R}^n , $\text{Leb } \mathbb{R}^n$, med hjälp av *Carathéodorys villkor*.

Subadditivitet (Sats 2.6 (3)): $A, B \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B).$$

Dessutom (bevisas senare): $\exists A, B \subset \mathbb{R}^n$ s.a. $A \cap B = \emptyset$, men

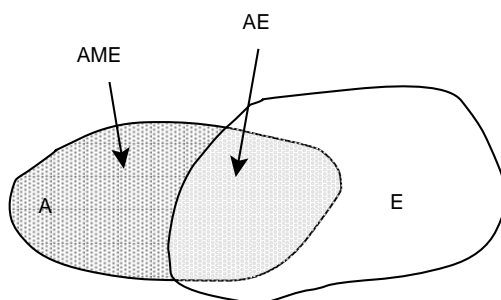
$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B)$$

d.v.s. m^* är inte σ -additiv. Vi vill undvika det senare fallet (genom att lämna bort en del av delmängderna):

Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en given mängd och $A \subset \mathbb{R}^n$ en testmängd". Då är

$$A = (A \cap E) \cup (A \setminus E) \quad \text{disjunkt union}$$

$$m^* \text{ subadditiv} \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$



Definition 2.19. (Carathéodorys villkor, 1914.) Mängden $E \subset \mathbb{R}^n$ är (*Lebesgue-*)mätbar om

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(\underbrace{A \setminus E}_{=A \cap E^c}) \quad \text{för alla } A \subset \mathbb{R}^n.$$

Sats 2.20. $E \subset \mathbb{R}^n$ mätbar \iff

$$(2.21) \quad m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \quad \text{för alla } A \subset \mathbb{R}^n, \text{ där } m^*(A) < \infty.$$

Bevis. \Rightarrow är trivialt. Antag att (2.21) gäller. Vi bör visa att Carathéodorys villkor gäller. Om man ersätter likhetstecknet med \leq i Carathéodorys villkor så gäller olikheten på grund av att det yttre måttet är subadditivt. Om man ersätter $=$ med \geq så gäller olikheten trivialt för alla A med $m^*(A) = \infty$. Det räcker alltså att kontrollera att villkoret gäller med \geq istället för $=$ för alla A med $m^*(A) < \infty$ och detta är precis vad (2.21) förutsätter.

Definition 2.22. Om $E \subset \mathbb{R}^n$ är mätbar så betecknar vi

$$m(E) = m^*(E) \quad (\text{vid behov } m_n(E)).$$

$m(E)$ är E 's (n -dimensionella Lebesgue-)mått.

Beteckna

$$\text{Leb } \mathbb{R}^n = \{E \subset \mathbb{R}^n : E \text{ är Lebesgue-mätbar}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Lebesguemåttet m är alltså det yttre måttets m^* restriktion till $\text{Leb } \mathbb{R}^n$:

$$m = m^*|_{\text{Leb } \mathbb{R}^n} : \text{Leb } \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty].$$

Senare visar vi att

$$\text{Leb } \mathbb{R}^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Sats 2.23.

$$m^*(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad E \text{ mätbar.}$$

Bevis. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara en testmängd.

$$\begin{aligned} A \cap E \subset E &\stackrel{\text{monot.}}{\implies} m^*(A \cap E) = 0 \\ A \supset A \setminus E &\stackrel{\text{monot.}}{\implies} m^*(A) \geq m^*(A \setminus E) = \underbrace{m^*(A \cap E)}_{=0} + m^*(A \setminus E) \\ &\Rightarrow E \text{ mätbar.} \end{aligned}$$

□

Sats 2.24.

$$E \text{ mätbar} \iff E^c \text{ mätbar.}$$

Bevis. Det räcker med att visa $\boxed{\Rightarrow}$: Låt E vara mätbar och $A \subset \mathbb{R}^n$. Då gäller

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \\ &= m^*(A \cap (E^c)^c) + m^*(A \cap E^c) \\ &\Rightarrow E^c \text{ mätbar.} \end{aligned}$$

□

Exempel 2.25.

$$E \subset \mathbb{R}^n \text{ uppräknelig} \xrightarrow{\text{Ex. 3}} m^*(E) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{S. 2.23}} E \text{ mätbar} \xrightarrow{\text{S. 2.24}} E^c \text{ mätbar.}$$

Specialfall:

$$\emptyset \in \text{Leb } \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \in \text{Leb } \mathbb{R},$$

$$\text{rationella talen } \mathbb{Q} \in \text{Leb } \mathbb{R}, \text{ irrationella talen } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \text{Leb } \mathbb{R}.$$

Låt E_1, E_2, \dots vara mätbara. Vi visar att

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{ och } \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \text{ är mätbara.}$$

För detta behöver vi några lemmor. Först det ändliga fallet:

Lemma 2.26. E_1, \dots, E_k mätbara $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^k E_i$ och $\bigcap_{i=1}^k E_i$ mätbara.**Bevis.** (a) union:

$$\bigcup_{i=1}^k E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \right) \cup E_k$$

 \Rightarrow man kan anta $k = 2$.Låt E_1, E_2 vara mätbara. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara en testmängd.

$$\left. \begin{array}{l} E_1 \text{ mätbar} \Rightarrow \\ m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) \\ \\ E_2 \text{ mätbar, } A \cap E_1^c \text{ som testmängd} \Rightarrow \\ m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$m^*(A) = \underbrace{m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2)}_{(\text{subadd. } \Rightarrow) \geq m^*(B)} + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c),$$

där

$$B = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2) = A \cap (E_1 \cup (E_1^c \cap E_2)) = A \cap (E_1 \cup (E_2 \setminus E_1))$$

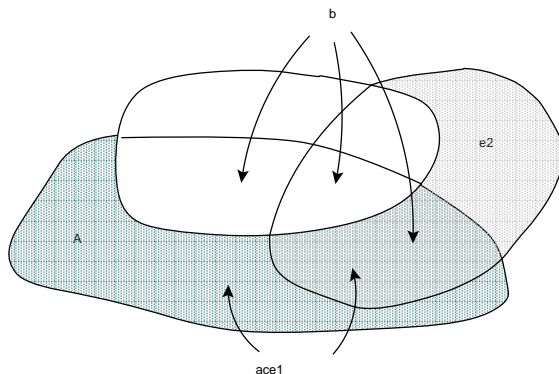
$$= A \cap (E_1 \cup E_2).$$

Därav är

$$m^*(A) \geq m^*(B) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$$

$$= m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)$$

$$\Rightarrow E_1 \cup E_2 \text{ mätbar.}$$



(b) snitt: de Morgan, Sats 2.24 ("komplementets mätbarhet") och (a) \Rightarrow

$$\bigcap_{i=1}^k E_i = \left(\bigcup_{i=1}^k E_i^c \right)^c \text{ mätbar.}$$

□

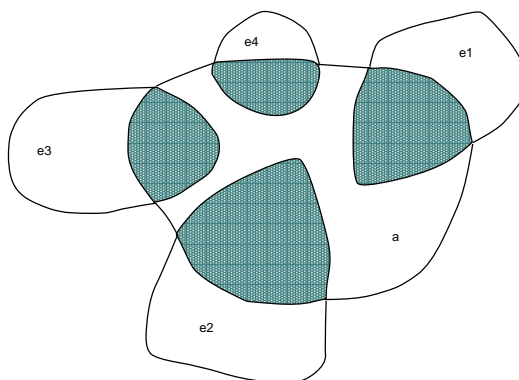
Sats 2.27. E_1, E_2 mätbara $\Rightarrow E_1 \setminus E_2$ mätbar.

Bevis. $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^c$.

□

Lemma 2.28. Låt E_1, \dots, E_k vara disjunkta och mätbara och låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara godtycklig. Då är

$$m^*(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^k E_i \right)) = \sum_{i=1}^k m^*(A \cap E_i).$$



Bevis. (a) Fallet $k = 2$: E_1 mätbar och testmängden $A \cap (E_1 \cup E_2) = B \Rightarrow$

$$m^*(B) = m^*(\underbrace{B \cap E_1}_{=A \cap E_1}) + m^*(\underbrace{B \setminus E_1}_{=A \cap E_2})$$

$$= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2) \text{ d.v.s. påståendet.}$$

(b) Allmänna fallet: Induktion: Antag att påståendet gäller då $2 \leq k \leq p$, d.v.s.

$$\left. \begin{array}{l} E_1, \dots, E_p \text{ mätbara} \\ E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j \\ A \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \Rightarrow m^*(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^p E_i \right)) = \sum_{i=1}^p m^*(A \cap E_i).$$

Då får vi att

$$\left. \begin{aligned} A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p+1} E_i \right) &= A \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^p E_i \right) \cup E_{p+1} \right) \\ \bigcup_{i=1}^p E_i, E_{p+1} &\text{ disjunkta och mätbara} \end{aligned} \right\} \implies$$

$$m^* \left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p+1} E_i \right) \right) \stackrel{k=2}{=} m^* \left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^p E_i \right) \right) + m^* (A \cap E_{p+1})$$

$$\stackrel{k=p}{=} \sum_{i=1}^p m^* (A \cap E_i) + m^* (A \cap E_{p+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} m^* (A \cap E_i).$$

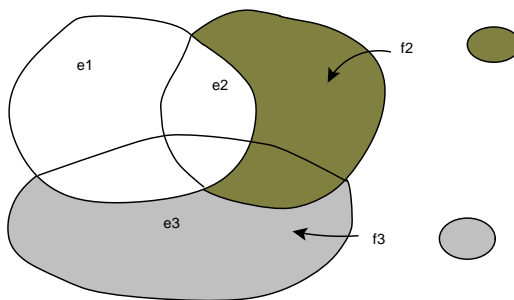
□

Lemma 2.29. Låt $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, där alla E_i är mätbara. Då existerar det disjunkta och mätbara $F_i \subset E_i$ s.a.

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Bevis. Välj

$$\begin{aligned} F_1 &= E_1, && \text{[mätbar]} \\ F_2 &= E_2 \setminus E_1, && \text{[mätbar (S. 2.27)]} \\ &\vdots \\ F_k &= E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i, && \text{[mätbar (S. 2.27 och 2.26)]} \\ &\vdots \end{aligned}$$



Då gäller (klart) att

$$F_i \subset E_i \quad \forall i, \quad E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \quad \text{och} \quad F_i \cap F_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

□

Lebesgue-mätbara mängders fundamentalsats

Sats 2.30. Låt E_1, E_2, \dots vara en följd (möjligen ändlig) av mätbara mängder. Då är mängderna

$$\bigcup_i E_i \quad \text{och} \quad \bigcap_i E_i$$

mätbara. Om mängderna E_i dessutom är disjunkta så gäller

$$(2.31) \quad m\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i m(E_i). \quad (\sigma\text{-additivitet})$$

Bevis. Beteckna

$$S = \bigcup_i E_i \stackrel{2.29}{=} \bigcup_i F_i, \quad \text{där mängderna } F_i \text{ är mätbara och disjunkta,}$$

$$S_k = \bigcup_i^k F_i, \quad S_k \subset S.$$

S. 2.26 (ändlig union mätbar) \Rightarrow S_k mätbar. Låt A vara en testmängd. Då är

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap S_k) + m^*(A \setminus S_k) \\ &\stackrel{\text{monot.}}{\geq} m^*(A \cap S_k) + m^*(A \setminus S) \\ &\stackrel{2.28}{=} \sum_{i=1}^k m^*(A \cap F_i) + m^*(A \setminus S) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Då vi låter $k \rightarrow \infty$ får vi

$$(2.32) \quad \begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap F_i) + m^*(A \setminus S) \\ &\stackrel{\text{subadd.}}{\geq} m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap F_i)\right) + m^*(A \setminus S) \\ &= m^*(A \cap S) + m^*(A \setminus S) \\ &\Rightarrow S = \bigcup_i E_i \text{ mätbar.} \end{aligned}$$

Olikheten (2.32), då $A = S$, och subadditiviteten \Rightarrow

$$\sum_i m(F_i) \stackrel{\text{subadd.}}{\geq} m(S) \stackrel{(2.32)}{\geq} \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(\overbrace{S \cap F_i}^{=F_i}\right) + \overbrace{m^*(S \setminus S)}^{=0} = \sum_{i=1}^{\infty} m(F_i).$$

Om mängderna E_i är disjunkta så kan vi välja $F_i = E_i$, varav (2.31) gäller.

På basis av den första delen och S. 2.24 är $\bigcap_i E_i = \left(\bigcup_i E_i^c\right)^c$ mätbar. \square

Exempel 2.33. Låt $A \subset \mathbb{R}^2$ s.a.

$$(2.34) \quad m^*(A \cap B(x, r)) \leq |x|r^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall r > 0.$$

Påstående: $m(A) = 0$

Bevis. (a) Låt A vara begränsad, varav $A \subset Q = [-a, a] \times [-a, a]$ (sluten kvadrat) för något a . Låt $n \in \mathbb{N}$. Dela Q i slutna delkvadrater Q_j , vars sidor har längden $2a/n$, och antalet kvadrater är n^2 . Låt x_j vara mittpunkten till Q_j . Då gäller:

$$\begin{aligned} |x_j| \leq 2a \quad \text{och} \quad Q_j \subset B(x_j, 2a/n) \quad & \text{(grova uppskattningar)} \\ \Rightarrow m^*(A \cap Q_j) \stackrel{\text{monot.}}{\leq} m^*(A \cap B(x_j, 2a/n)) \stackrel{(2.34)}{\leq} |x_j|(2a/n)^3 \leq (2a)^4 n^{-3}. \end{aligned}$$

$$A = \bigcup_{j=1}^{n^2} (A \cap Q_j) \stackrel{\text{subadd.}}{\implies}$$

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n^2} (A \cap Q_j)\right) \leq \sum_{j=1}^{n^2} m^*(A \cap Q_j) \\ &\leq n^2 (2a)^4 n^{-3} = (2a)^4 n^{-1} \quad \forall n \\ &\stackrel{n \rightarrow \infty}{\implies} m^*(A) = 0 \Rightarrow m(A) = 0. \end{aligned}$$

(b) Allmänna fallet.

$$A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j, \quad \text{där } A_j = A \cap B(0, j) \text{ är begränsad.}$$

$$A_j \subset A \Rightarrow \text{samma villkor (2.34) gäller för } A_j \stackrel{(a)}{\implies} m(A_j) = 0 \quad \forall j$$

$$\stackrel{\text{subadd.}}{\implies} m(A) = 0.$$

2.35 Exempel på mätbara mängder

De enda exemplen hittills:

$$m^*(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \text{ och } A^c \text{ mätbara}$$

I detta kapitel visar vi bl.a. att de öppna och slutna mängderna är mätbara. Först:

$$I \subset \mathbb{R}^n \quad n\text{-intervall (öppet, slutet, osv.)} \quad \Rightarrow \quad I \text{ mätbar och } m(I) = \ell(I).$$

(Riemann-)integralen som stöd:

Låt $I = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ vara ett n -intervall, där $I_j \subset \mathbb{R}$ är ett intervall med ändpunkterna $a_j < b_j$, $j = 1, \dots, n$. Låt $\chi_I: \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ (karaktäristiska funktionen till I)

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin I. \end{cases}$$

Vi väljer det slutna n -intervallet $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \supset I$ och (Riemann-)integrerar

$$\int_Q \chi_I = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} 1 \, dx_1 \cdots dx_n = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = \ell(I).$$

Lemma 2.36. Låt I och I_1, \dots, I_k vara n -intervall s.a. $I \subset \bigcup_{j=1}^k I_j$. Då är $\ell(I) \leq \sum_{j=1}^k \ell(I_j)$. Om dessutom snitten $I_i \cap I_j$, $i \neq j$, saknar inre punkter (d.v.s. inget $I_i \cap I_j$, $i \neq j$, innehåller ett öppet klot) och $I = \bigcup_{j=1}^k I_j$, så är $\ell(I) = \sum_{j=1}^k \ell(I_j)$.

Bevis. Definiera $\chi, \chi_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases} \quad \text{och} \quad \chi_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_j \\ 0, & x \notin I_j. \end{cases}$$

Ur antagandet $I \subset \bigcup_{j=1}^k I_j$ följer att $\chi(x) \leq \sum_{j=1}^k \chi_j(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$. Välj ett slutet n -intervall Q som innehåller alla ovannämnda n -intervall och integrera över Q

$$\ell(I) = \int_Q \chi \leq \int_Q \left(\sum_j \chi_j \right) = \sum_j \int_Q \chi_j = \sum_j \ell(I_j).$$

Om intervallen I_j saknar gemensamma inre punkter gäller $\chi(x) = \sum_{j=1}^k \chi_j(x)$, förutom möjligtvis för intervallens ändpunkter, vilket inte inverkar på integreringen. \square

Anmärkning 2.37. Detta kan även bevisas utan integrering genom att dela alla n -intervall (tillräckligt tätt) i delintervall, så att varje delintervall till I är ett delintervall till åtminstone ett delintervall I_j . (Vi kan anta att alla ursprungliga och nya n -intervall är slutna.)

Lemma 2.38. Om I är ett n -intervall så är

$$m^*(I) = \ell(I).$$

Bevis. (a): $\forall \varepsilon > 0 \exists$ öppet n -intervall $J \supset I$ s.a. $\ell(J) < \ell(I) + \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \{J\} \text{ Leb. övertäckning till } I &\Rightarrow m^*(I) \leq \ell(I) + \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \text{ godt.} &\Rightarrow m^*(I) \leq \ell(I). \end{aligned}$$

(b): Antag först att I är slutet. Låt \mathcal{F} vara en Lebesgue-övertäckning till I . I slutet och begränsat $\Rightarrow I$ kompakt $\Rightarrow \exists$ ändlig delövertäckning $\mathcal{F}_0 = \{I_1, \dots, I_k\} \subset \mathcal{F}$. Lemma 2.36 \Rightarrow

$$\begin{aligned} \ell(I) &\leq S(\mathcal{F}_0) \leq S(\mathcal{F}) \\ \inf \text{ över } \forall \mathcal{F} &\Rightarrow \ell(I) \leq m^*(I). \end{aligned}$$

Alltså: $\ell(I) = m^*(I)$ om I är slutet. Antag sedan att I inte (nödvändigtvis) är slutet. Låt $\varepsilon > 0$. Nu \exists slutet n -intervall $I_c \subset I$ s.a. $\ell(I_c) > \ell(I) - \varepsilon$. Därav är

$$\begin{aligned} m^*(I) &\stackrel{\text{monot.}}{\geq} m^*(I_c) = \ell(I_c) > \ell(I) - \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \text{ godt.} &\Rightarrow m^*(I) \geq \ell(I). \end{aligned}$$

\square

Anmärkning 2.39. (1) Det ovannämnda gäller också för *förkrympta* n -intervall $I = I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$, varav (åtminstone) något I_j är en singletonmängd. Då är $\ell(I) \stackrel{\text{def}}{=} 0 = m_n^*(I)$.

(2) Låt $A \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ och $J_1, J_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ godtyckliga n -intervall s.a. $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$. För varje $i \exists$ öppet n -intervall $I_i \supset J_i$ s.a. $\ell(I_i) < \ell(J_i) + \varepsilon/2^i$. Nu är $\{I_1, I_2, \dots\}$ en Lebesgue-övertäckning till A , varav $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(J_i) + \varepsilon$. (Geometrisk serie.) Ur detta följer att

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \ell(J_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i, J_i \text{ godtyckligt } n\text{-intervall} \right\}.$$

Sats 2.40. Om I är ett n -intervall, så är I mätbart och

$$m(I) = \ell(I).$$

Bevis. S. 2.38 \Rightarrow räcker att visa att I är mätbart. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara en testmängd. Påstående:

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I).$$

Låt $\varepsilon > 0$. Då \exists en Lebesgue-övertäckning till A ; $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \dots\}$ (öppna n -intervall) s.a.

$$S(\mathcal{F}) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

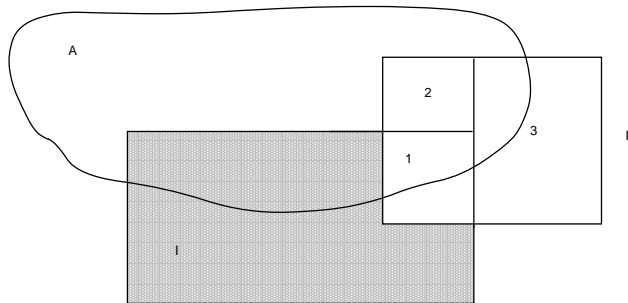
$$\left. \begin{array}{l} I = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n \\ I_j =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[\end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$I_j \cap I = (]a_1, b_1[\cap \Delta_1) \times \cdots \times (]a_n, b_n[\cap \Delta_n) = \begin{cases} n\text{-intervall } I'_j \\ \emptyset. \end{cases}$$

$I_j \setminus I$ är inte nödvändigtvis ett n -intervall, men

$$I_j \setminus I = \bigcup_k I''_{j,k}$$

är en ändlig union av n -intervall s.a. snittena $I'_j \cap I''_{j,k}$ och $I''_{j,k} \cap I''_{j,i}$, $k \neq i$, saknar inre punkter.



Lemma 2.36 och 2.38 \Rightarrow

$$\ell(I_j) \stackrel{2.36}{=} \ell(I'_j) + \sum_k \ell(I''_{j,k}) \stackrel{2.38}{=} m^*(I'_j) + \sum_k m^*(I''_{j,k}).$$

Summa över j \Rightarrow

$$\begin{aligned} m^*(A) + \varepsilon &\geq S(\mathcal{F}) = \sum_j \ell(I_j) = \sum_j m^*(I'_j) + \sum_j \sum_k m^*(I''_{j,k}) \\ &\stackrel{\text{subadd.}}{\geq} m^*\left(\underbrace{\bigcup_j I'_j}_{\supset A \cap I}\right) + m^*\left(\underbrace{\bigcup_{j,k} I''_{j,k}}_{\supset A \setminus I}\right) \\ &\stackrel{\text{monot.}}{\geq} m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I). \end{aligned}$$

Låt $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I).$ □

Sats 2.41. (Lindelöfs sats) Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara en godtycklig delmängd och låt

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \supset A$$

vara en övertäckning bestående av öppna mängder $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Då existerar en uppräknelig delövertäckning

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_{\alpha_j} \supset A.$$

Bevis. Övningsuppgift □

Sats 2.42. De öppna och slutna mängderna i \mathbb{R}^n är mätbara.

Bevis. (a) Låt A vara öppen. Om $x \in A \exists$ ett öppet n -intervall $I(x)$ s.a. $x \in I(x) \subset A$ (\exists ett öppet klot $B(x, r_x) \subset A$ och i klotet finns ett öppet n -intervall).

$\{I(x) : x \in A\}$ är en öppen övertäckning till A .

Lindelöf $\Rightarrow \exists$ uppräknelig delövertäckning $\{I(x_j) : j \in \mathbb{N}\}$

$$\Rightarrow A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I(x_j) \text{ är en uppräknelig union av mätbara mängder}$$

$$\Rightarrow A \text{ är mätbar.}$$

(b) Om A är sluten, så är A^c öppen och därav mätbar $\Rightarrow A = (A^c)^c$ mätbar. □

Exempel 2.43. Låt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara kontinuerlig. Påstående: $f\mathbb{R}^2$ är mätbar.

Bevis.

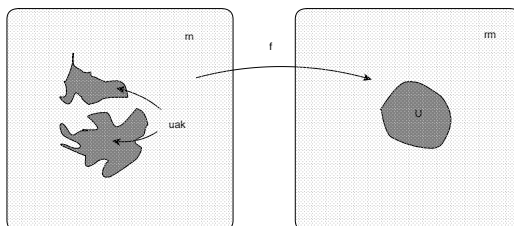
$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j, \text{ där } A_j = \bar{B}(0, j) \text{ är kompakt}$$

$$f \text{ kontinuerlig} \Rightarrow fA_j \text{ kompakt}$$

$$\Rightarrow fA_j \text{ sluten} \Rightarrow fA_j \text{ mätbar}$$

$$f\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} fA_j \Rightarrow f\mathbb{R}^2 \text{ mätbar.}$$

Påminnelse: Låt $n, m \geq 1$. Avbildningen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig $\iff f^{-1}U \subset \mathbb{R}^n$ är öppen \forall öppna $U \subset \mathbb{R}^m$.



Om $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig och $C \subset \mathbb{R}^n$ är kompakt så är $fC \subset \mathbb{R}^m$ kompakt. Argumentering:

$$\left. \begin{array}{l} fC \subset \bigcup_{i \in I} U_i \text{ öppen övertäckning} \\ \Rightarrow C \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}U_i \text{ öppen övertäckning} \\ C \text{ kompakt} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \text{ ändlig delövertäckning}$$

$$C \subset \bigcup_{j=1}^k f^{-1}U_{i_j} \Rightarrow fC \subset \bigcup_{j=1}^k U_{i_j}.$$

Allmänna mätbara mängder, σ -algebran.

$$\mathcal{F}_\sigma\text{-mängder } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i, \quad F_i \text{ slutna} \quad (\text{t.ex. } \mathbb{Q}, [a, b], (a, b))$$

$$\mathcal{G}_\delta\text{-mängder } \bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i, \quad G_i \text{ öppna} \quad (\text{t.ex. } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, [a, b], (a, b))$$

$$\mathcal{F}_{\sigma\delta}\text{-mängder } \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_j, \quad A_j \in \mathcal{F}_\sigma$$

$$\mathcal{G}_{\delta\sigma}\text{-mängder } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_j, \quad B_j \in \mathcal{G}_\delta$$

o.s.v.

Definition 2.44. Låt X vara en godtycklig mängd. Familjen $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ är en σ -algebra över X om

- (a) $\emptyset \in \Gamma$;
- (b) $A \in \Gamma \Rightarrow A^c \in \Gamma$;
- (c) $A_i \in \Gamma, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$.

Anmärkning 2.45. (1) Av (a) och (b) följer genast att $X \in \Gamma$.

- (2) Om Γ är en σ -algebra och $A_i \in \Gamma, i \in \mathbb{N}$, så gäller även $\bigcap_i A_i \in \Gamma$, ty

$$\bigcap_i A_i = \bigcap_i (A_i^c)^c = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c \in \Gamma.$$

- (3) Vi har bevisat: Familjen $\text{Leb } \mathbb{R}^n$ av Lebesgue-mätbara mängder är en σ -algebra över \mathbb{R}^n (Satserna 2.23, 2.24, 2.30).
- (4) $\mathcal{P}(X)$ är den största σ -algebran över X ; $\{\emptyset, X\}$ är den minsta σ -algebran över X ; om $A \subset X$ (fixerad) $\Rightarrow \{\emptyset, X, A, A^c\}$ är en σ -algebra över X .

Definition 2.46. Familjen av *Borel-mängder* $\text{Bor } \mathbb{R}^n$ är den minsta σ -algebran över \mathbb{R}^n som innehåller de slutna mängderna.

Existens: Beteckna

$$\mathcal{B} = \bigcap \{ \Gamma : \Gamma \text{ är en } \sigma\text{-algebra över } \mathbb{R}^n, \Gamma \text{ innehåller de slutna mängderna} \}.$$

(T.ex. $\Gamma = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ är en σ -algebra över \mathbb{R}^n som innehåller de slutna mängderna.)
 \mathcal{B} är en σ -algebra, ty

- (a) $\emptyset \in \mathcal{B}$;
 (b) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \Gamma \forall \Gamma \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$;
 (c) $A_i \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \Gamma \forall \Gamma \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B}$.

Konstruktion $\Rightarrow \mathcal{B}$ är den minsta σ -algebran över \mathbb{R}^n som innehåller de slutna mängderna, varav

$$\boxed{\text{Bor } \mathbb{R}^n = \mathcal{B}.}$$

Öppna, slutna, \mathcal{F}_σ , \mathcal{G}_δ , o.s.v. mängder är Borel-mängder.

Sats 2.47. Varje Borel-mängd är mätbar.

Bevis. Familjen av mätbara mängder $\text{Leb } \mathbb{R}^n$ är en σ -algebra och innehåller de slutna mängderna, varav

$$\text{Bor } \mathbb{R}^n \subset \text{Leb } \mathbb{R}^n.$$

□

2.48 Allmän mätteori. Hausdorffmått

Definition 2.49. Låt Γ vara en σ -algebra över X . Funktionen $\mu: \Gamma \rightarrow [0, +\infty]$ är ett *mått* i X , om

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
 (ii) $A_i \in \Gamma$, $i \in \mathbb{N}$, disjunkta $\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$. "σ-additivitet"

Vi säger att (X, Γ, μ) är ett *måttrum*.

Anmärkning 2.50. 1. Varje mått μ är även *monotont*:

$$A, B \in \Gamma, A \subset B \Rightarrow 0 \leq \mu(A) \leq \mu(B).$$

Orsak: $A, B \setminus A \in \Gamma$ disjunkta, $B = A \cup (B \setminus A)$

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A).$$

2. $A, B \in \Gamma, A \subset B, \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3. Måttet μ är ett *sannolikhetsmått*, om $\mu(X) = 1$.

Exempel 2.51. (1) Det n -dimensionella Lebesguemåttet

$$m_n: \text{Leb } \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$$

är ett mått (inte ett sannolikhetsmått).

Orsak: $\text{Leb } \mathbb{R}^n$ är en σ -algebra över \mathbb{R}^n och m är σ -additiv.

(2) Låt $X \neq \emptyset$ vara en godtycklig mängd. Fixera $x \in X$ och låt

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \in A; \\ 0, & \text{om } x \notin A. \end{cases}$$

för alla $A \subset X$. Då är $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ ett sannolikhetsmått (det s.k. *Diracmättet* i elementet $x \in X$).

Orsak: (a) $\mathcal{P}(X)$ är en σ -algebra.

(b) Låt $A_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$, vara disjunkta (d.v.s. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$). Då är

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

ty

$$\begin{cases} x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \Rightarrow \text{båda sidorna} = 0 \\ x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \stackrel{\text{sep.}}{\implies} \exists \text{ exakt ett } j_0 \in \mathbb{N} \text{ s.a. } x \in A_{j_0} \Rightarrow \text{båda sidorna} = 1. \end{cases}$$

(3) $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$, $\mu(A) = 0 \forall A \subset X$, är ett mått.

(4) Låt $p_j \geq 0$, $j \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$. För alla $A \subset \mathbb{N}$ definierar vi

$$\mu(A) = \sum_{j \in A} p_j.$$

Då är $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$ ett sannolikhetsmått (Övningsuppgift).

Definition 2.52. Låt X vara en godtycklig mängd. Avbildningen $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ är ett *yttre mått* i X , om

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(2) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(3) $A_j \subset X$, $j \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

Mängden $E \subset X$ är dessutom (μ^* -)mätbar, om (Carathéodorys villkor)

$$(2.53) \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

gäller $\forall A \subset X$.

Beteckna

$$\mathcal{M}_{\mu^*}(X) = \{E \subset X : E \text{ är } \mu^*\text{-mätbar}\}$$

eller kortare $\mathcal{M}(X)$, om μ^* framgår av sammanhanget.

Anmärkning 2.54. $\mathcal{M}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ är en σ -algebra över X och restriktionen

$$\mu^*|_{\mathcal{M}(X)}: \mathcal{M}(X) \rightarrow [0, +\infty]$$

är ett mått. Bevis. Som för Lebesgues yttre mått.

Hausdorffmått och -dimension.

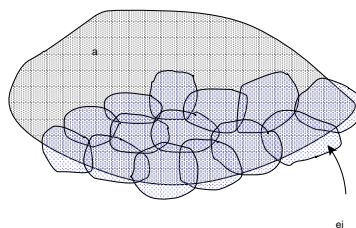
Diametern för mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ är

$$d(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}, \quad d(\emptyset) = 0.$$

Låt $0 \leq s < \infty$ och $\delta > 0$. Om $A \subset \mathbb{R}^n$, definierar vi

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} d(E_j)^s : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, d(E_j) \leq \delta\right\},$$

med överenskommelserna $d(\{x\})^0 = 1 \forall x \in \mathbb{R}^n$ och $d(\emptyset)^s = 0 \forall s \geq 0$. (Ovan är $E_j \subset \mathbb{R}^n$ en godtycklig delmängd.)



Vi inser genast att $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \mathcal{H}_{\delta_1}^s(A) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^s(A)$ (inf över en mindre mängd).

Definition 2.55. Det s-dimensionella (yttre) Hausdorffmåttet för mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ är

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

(Vi kan ha $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.)

Sats 2.56. Låt $0 \leq s < \infty$. Då är \mathcal{H}^s ett yttre mått i \mathbb{R}^n .

Bevis. Övningsuppgift. □

\mathcal{H}^s -mätbara mängder, $\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}(\mathbb{R}^n)$, definieras med hjälp av Carathéodorys villkor (2.53).

Tilläggsinformation:

$$\text{Bor } \mathbb{R}^n \subset \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}(\mathbb{R}^n).$$

Sats 2.57. För varje $A \subset \mathbb{R}^n$ existerar ett entydigt tal $s = s(A) \geq 0$, som uppfyller

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{s+\varepsilon}(A) &= 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ och} \\ \mathcal{H}^{s-\varepsilon}(A) &= +\infty \quad \forall \varepsilon \in (0, s]. \end{aligned}$$

Det entydigt bestämda talet $s = s(A)$ kallas för A:s Hausdorffdimension.

Bevis. Påstående 1:

$$s \geq 0 \text{ och } \mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0 \quad \forall t > s.$$

Låt $\delta > 0$. $\Rightarrow \exists$ övertäckning $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \supset A$ s.a. $d(E_j) \leq \delta \forall j$ och

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} d(E_j)^s &\leq \mathcal{H}_\delta^s(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1 \stackrel{\text{ant.}}{<} \infty \\ \Rightarrow \mathcal{H}_\delta^t(A) &\leq \inf_{j=1}^{\infty} d(E_j)^t = \sum_{j=1}^{\infty} d(E_j)^s \underbrace{d(E_j)^{t-s}}_{\leq \delta} \stackrel{t>s}{\leq} \delta^{t-s} \sum_{j=1}^{\infty} d(E_j)^s \\ &\leq \delta^{t-s} \underbrace{(\mathcal{H}^s(A) + 1)}_{< \infty} \end{aligned}$$

Låt $\delta \rightarrow 0 \Rightarrow \delta^{t-s} \rightarrow 0 \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^t(A) = 0$, d.v.s. Påstående 1 är bevisat. Låt

$$s(A) = \inf\{t > 0: \mathcal{H}^t(A) = 0\}.$$

Påstående 1 $\Rightarrow \mathcal{H}^{s(A)+\varepsilon}(A) = 0 \forall \varepsilon > 0$. å andra sidan; Påstående 1 \Rightarrow om $0 \leq s < t < \infty$ och $\mathcal{H}^t(A) > 0$, så är $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$. \square

Anmärkning 2.58. (1) Hausdorffmättet kan definieras på samma sätt i ett godtyckligt metriskt rum (X, d) (diametern till $A \subset X$ är $d(A) = \sup\{d(x, y): x, y \in A\}$).

(2) \mathcal{H}^0 är kardinalitetsmättet, d.v.s. $\mathcal{H}^0(A) = \text{card } A =$ mängden av element i A .

(3) I \mathbb{R}^n gäller: $\mathcal{H}^n = c m_n^*$, där $c = c(n)$ är en konstant. Därför normerar man ofta \mathcal{H}^s genom att multiplicera med en konstant som beror på s .

(4) $A \subset \mathbb{R}^n$ given \Rightarrow Hausdorffdimensionen $s(A) \in [0, n]$ (inte nödvändigtvis ett heltal). Det motsvarande värdet för mättet $\mathcal{H}^{s(A)}(A)$ är något tal $\in [0, +\infty]$.

(5) I \mathbb{R}^n anpassar sig \mathcal{H}^s , $0 \leq s \leq n$, bra till att mäta småmängder. T.ex. mängden A med mättet $m_n(A) = 0$, kan ha $\mathcal{H}^s(A) > 0$, $0 \leq s < n$. $\mathcal{H}^s(A)$ serfinstrukturen i A p.g.a. villkoren $d(E_j) \leq \delta$, $\delta \rightarrow 0$.

2.59 Konvergens av mått

Låt $X \neq \emptyset$, $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ vara en σ -algebra och $\mu: \Gamma \rightarrow [0, +\infty]$ ett mått.

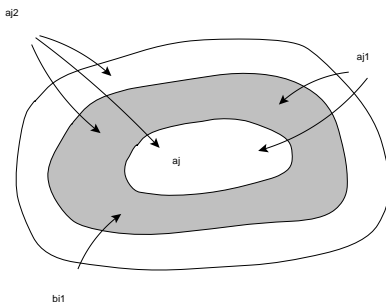
Sats 2.60. Låt $A_j \in \Gamma$, $j = 1, \dots$, vara en växande följd (d.v.s. $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset X$ (μ -)mätbara). Då gäller att

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j).$$

Obs.: $A_j \in \Gamma \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma$.

Bevis.

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(A_j \setminus A_{j-1})}_{\text{sep. mätb.}}, \quad A_0 = \emptyset \quad (\text{överenskommelse})$$



Måttets σ -additivitet \Rightarrow

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\underbrace{\bigcup_{j=1}^k (A_j \setminus A_{j-1})}_{=A_k}\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k). \end{aligned}$$

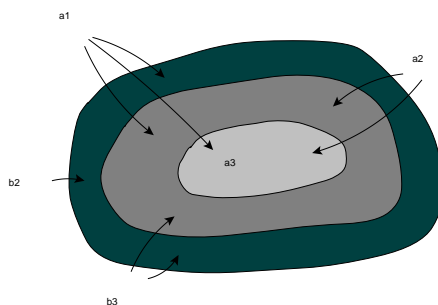
□

Sats 2.61. Låt $A_j \in \Gamma$, $j = 1, \dots$, vara en avtagande följd (d.v.s. $X \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ (μ -)mätbara). Om dessutom $\mu(A_k) < \infty$ för något $k \in \mathbb{N}$, så är

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j).$$

Obs.: Γ σ -alg. $\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma$.

Bevis. Vi kan anta att $\mu(A_1) < \infty$ (vid behov indexerar vi mängderna A_j pånytt). Beteckna $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A$ och $B_j = A_1 \setminus A_j$. Då är mängderna $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ mätbara.



$$\text{Sats 2.60} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(B_j).$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_j) = A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \setminus A$$

$$A_1 = A_j \cup \underbrace{(A_1 \setminus A_j)}_{=B_j} \quad \text{disjunkt union} \Rightarrow \mu(A_1) = \mu(A_j) + \mu(B_j)$$

$$A_1 = A \cup (A_1 \setminus A) \quad \text{disjunkt union} \Rightarrow \mu(A_1) = \mu(A) + \mu(A_1 \setminus A)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu(A) &= \mu(A_1) - \mu(A_1 \setminus A) \quad (\text{här måste vi ha } \mu(A_1) < \infty) \\
&= \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \\
&= \mu(A_1) - \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(B_j) \\
&= \mu(A_1) - \lim_{j \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_j)) \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j).
\end{aligned}$$

□

Anmärkning 2.62. Villkoret $\mu(A_k) < \infty$ för något $k \in \mathbb{N}$ kan inte lämnas bort. Här är två exempel som visar detta:

(a) Låt μ vara räknemåttet på \mathbb{N} och definiera mängderna $A_j \subset \mathbb{N}$ genom

$$A_j = \{j, j+1, j+2, \dots\}.$$

Då är $\mu(A_j) = \infty$ för varje j och således är $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = \infty$ trots att $\bigcap A_j = \emptyset$.

(b)

$$\begin{aligned}
A_j &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > j\} \\
A_1 &\supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \\
m_2(A_j) &= \infty \quad \forall j \\
\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \emptyset &\Rightarrow m_2\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = 0 \neq \lim_{j \rightarrow \infty} m_2(A_j).
\end{aligned}$$

Anmärkning 2.63. (Viktig tillämpning inom sannolikhetssteori) Borel-Cantellis lemma: Låt (X, Γ, μ) vara ett måttrum, $A_j \in \Gamma$, $j \in \mathbb{N}$, och

$$A = \{x \in X : x \in A_j \text{ för oändligt många index } j \in \mathbb{N}\}.$$

Då gäller att:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

(Övningsuppgift)

2.64 Lebesguemåttets samband med Jordanmåttet

Sats 2.65. $E \subset \mathbb{R}^n$ (Leb.-)mätbar $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists$ (Leb.-)mätbara A och B s.a. $A \subset E \subset B$ och $m(B \setminus A) < \varepsilon$.

Bevis. Övningsuppgift

□

Definition 2.66. $E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mätbar $\iff E$ begränsad och χ_E Riemann-integrerbar. Då är Jordanmåttet för E

$$m_J(E) = \int \chi_E.$$

Sats 2.67. Om $E \subset \mathbb{R}^n$ är Jordan-mätbar, så är E Lebesgue-mätbar och $m_J(E) = m(E)$.

Bevis. Antag $n = 2$, allmänna n på liknande sätt. Välj en sluten rektangel $R \supset E$. Låt $D = \{R_j\}$ vara en partition av R i ändligt många slutna rektanglar R_j som saknar gemensamma inre punkter. Den karakteristiska funktionen χ_E har övre summan

$$M_D = \sum_j G_j \ell(R_j), \quad G_j = \begin{cases} 1, & R_j \cap E \neq \emptyset; \\ 0, & R_j \cap E = \emptyset. \end{cases}$$

Beteckna

$$B_D = \bigcup \{R_j : R_j \cap E \neq \emptyset\}, \quad \text{varav } B_D \text{ är mätbar och}$$

$$M_D = \sum_{R_j \cap E \neq \emptyset} \ell(R_j) \stackrel{\text{S. 2.36}}{=} m(B_D).$$

Den motsvarande undre summan är

$$m_D = \sum_j g_j \ell(R_j), \quad g_j = \begin{cases} 1, & R_j \subset E; \\ 0, & R_j \not\subset E. \end{cases}$$

Beteckna

$$A_D = \bigcup \{R_j : R_j \subset E\}, \quad \text{varav } A_D \text{ är mätbar och}$$

$$m_D = m(A_D).$$

Låt $\varepsilon > 0$. E Jordan-mätbar $\Rightarrow \chi_E$ Riemann-integrerbar \Rightarrow

$$\begin{aligned} &\exists \text{ partition } D \text{ s.a. } M_D - m_D < \varepsilon \\ &B_D = (B_D \setminus A_D) \cup A_D \text{ disjunkt union} \\ \Rightarrow &m(B_D \setminus A_D) = m(B_D) - m(A_D) = M_D - m_D < \varepsilon \\ &A_D \subset E \subset B_D \stackrel{\text{S. 2.65}}{\implies} E \text{ mätbar.} \end{aligned}$$

Dessutom är

$$\begin{aligned} &m(A_D) \leq m(E) \leq m(B_D) \quad \text{och} \\ &m(A_D) = m_D \leq m_J(E) \leq M_D = m(B_D) \\ \Rightarrow &-\varepsilon < m_D - M_D \leq m(E) - m_J(E) \leq M_D - m_D < \varepsilon \\ &\text{d.v.s. } |m(E) - m_J(E)| < \varepsilon \\ &\Rightarrow m(E) = m_J(E). \end{aligned}$$

□

Följd. De kända formlerna (som fås genom Riemann-integrering) för yta och volym är i kraft. T.ex. Beteckna $B^n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\} \subset \mathbb{R}^n$ (öppet klot).

$$m_2(B^2(x, r)) = \pi r^2; \quad m_3(B^3(x, r)) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Tilläggsinformation: (bevisas inte) $E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mätbar $\iff E$ begränsad och $m_n(\partial E) = 0$.

2.68 En icke-(Lebesgue-)mätbar mängd i \mathbb{R}

Sats 2.69. (Vitali, 1905)

$$\text{Leb } \mathbb{R} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

d.v.s. $\exists E \subset \mathbb{R}$ som inte är Lebesgue-mätbar.

Idén är att hitta en mängd $B \subset \mathbb{R}$, $0 < m^*(B) < \infty$, och en partition av B

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

i *disjunkta* mängder A_i s.a.

$$m^*(A_i) = m^*(A_1) \quad \forall i.$$

Då måste någon av mängderna A_i vara icke-mätbar. Ett sätt att vara säker på att mängderna A_i har samma yttre mått är att sträva efter att välja

$$A_i = A + x_i$$

för någon (fixerad) mängd $A \subset \mathbb{R}$ och $x_i \in \mathbb{R}$, och använda yttre måttets translationsinvarians.

Bevis. Betrakta kvotgruppen \mathbb{R}/\mathbb{Q} , vars element är ekvivalensklasser $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$E(x) = E(y) \iff x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Vi kan skriva $E(x) = x + \mathbb{Q}$. Ur varje ekvivalensklass $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$, väljer vi exakt en representant som ligger i intervallet $[0, 1]$. Låt A vara mängden av dessa representanter.

Påstående: $A \notin \text{Leb } \mathbb{R}$.

Antites: $A \in \text{Leb } \mathbb{R}$.

(i) Mängderna $A + r$, $r \in \mathbb{Q}$, är disjunkta:

$$\begin{aligned} x \in (A + r) \cap (A + s), \quad r, s \in \mathbb{Q} &\Rightarrow x = a_1 + r \quad \text{och} \quad x = a_2 + s, \quad a_1, a_2 \in A \\ &\Rightarrow a_1 - a_2 = s - r \in \mathbb{Q} \\ &\Rightarrow a_1 \sim a_2 \Rightarrow E(a_1) = E(a_2) \\ &\Rightarrow a_1 = a_2 \quad (\text{ty vi valde } \underline{\text{exakt}} \text{ ett element}) \\ &\Rightarrow s = r. \end{aligned}$$

(ii) $m(A) = 0$ (vi använder translationsinvariansen: $A \in \text{Leb } \mathbb{R} \Rightarrow A + a \in \text{Leb } \mathbb{R}$ och $m(A) = m(A + a)$):

$$\begin{aligned} A \subset [0, 1] &\Rightarrow A + \frac{1}{n} \subset [0, 2] \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow 2 \geq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A + \frac{1}{n})\right) \stackrel{\text{disj.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} m(A + \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A) \\ &\Rightarrow m(A) = 0. \end{aligned}$$

(iii) $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r)$:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} &\Rightarrow \exists a \in E(x) \cap A \Rightarrow x - a = r \in \mathbb{Q}, \quad a \in A \\ &\Rightarrow x = a + r, \quad a \in A \\ &\Rightarrow x \in A + r. \end{aligned}$$

(i), (ii) och (iii) \Rightarrow

$$+\infty = m(\mathbb{R}) = \sum_{r \in \mathbb{Q}} m(A + r) = \sum_{r \in \mathbb{Q}} \underbrace{m(A)}_{=0} = 0.$$

Denna motsägelse visar att antitesen är felaktig och således att påståendet är sant. \square

Anmärkning 2.70. 1. I \mathbb{R}^n , $\forall n \geq 1$, \exists liknande exempel, varav

$$\text{Leb } \mathbb{R}^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

2. Om $A \subset \mathbb{R}$ är en godtycklig mängd s.a. $m^*(A) > 0$, så $\exists B \subset A$ s.a. $B \notin \text{Leb } \mathbb{R}$. (Övningsuppgift)

Tilläggsinformation: (Banach-Tarskis paradox, 1924): Ett slutet klot \bar{B} i \mathbb{R}^3 kan delas upp i ändligt många (disjunkta) bitar A_j ,

$$\bar{B} = \bigcup_{j=1}^m A_j$$

(med ett lämpligt $m \geq 2$) och sedan kan bitarna ordnas om med avbildningarna

$$g_j: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, g_j(x) = y_j + T_j(x),$$

där $y_j \in \mathbb{R}^3$ och $T_j: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ är en linjär rotation ($j = 1, \dots, m$), så att det uppstår lika stora (med samma radie) slutna kulor som \bar{B} . Lebesguemåttet translations- och rotationsinvariant \Rightarrow mängderna A_1, \dots, A_m inte mätbara.

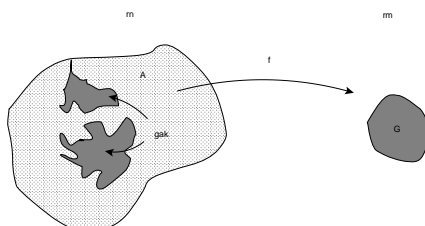
3 Mätbara avbildningar

3.1 Mätbar avbildning

Beteckna $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Definition 3.2. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$. Avbildningen $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ är mätbar (med avseende på σ -algebran $\text{Leb } \mathbb{R}^n$) om $f^{-1}G$ är (Lebesgue-)mätbar för alla öppna $G \subset \mathbb{R}^m$. Avbildningen $f: A \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ är mätbar om

- (i) $f^{-1}G$ är mätbar för alla öppna $G \subset \mathbb{R}^m$,
- (ii) $f^{-1}(+\infty)$ är mätbar och
- (iii) $f^{-1}(-\infty)$ är mätbar.



Anmärkning 3.3. 1. $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ är mätbar \Rightarrow

$$A = f^{-1}\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n \text{ är en mätbar mängd.}$$

Om $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ är mätbar \Rightarrow

$$A = f^{-1}(\mathbb{R}) \cup f^{-1}(+\infty) \cup f^{-1}(-\infty) \subset \mathbb{R}^n \text{ är en mätbar mängd.}$$

2. $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ mätbar, $B \subset A$ mätbar $\Rightarrow f|_B: B \rightarrow \mathbb{R}^m$ mätbar.

Orsak: $G \subset \mathbb{R}^m$ öppen \Rightarrow

$$(f|_B)^{-1}(G) = \underbrace{B}_{\text{mätbar}} \cap \underbrace{f^{-1}G}_{\text{mätbar}}$$

är mätbar.

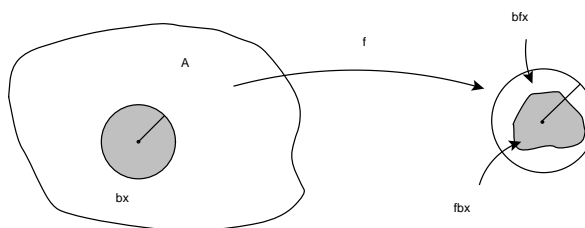
3. Låt X vara en godtycklig mängd och $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ en σ -algebra.

Def. Avbildningen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ är mätbar (i avseende på σ -algebran Γ) om $f^{-1}G \in \Gamma$ för alla öppna $G \subset \mathbb{R}$.

Påminnelse. (Vektoranalys/Topo I) Avbildningen $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, är kontinuerlig i $x \in A$ om $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.a.

$$f(B(x, \delta) \cap A) \subset B(f(x), \varepsilon).$$

$f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig om f är kontinuerlig $\forall x \in A$.



Det gäller att: $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig \iff

$$(3.4) \quad f^{-1}G \text{ är öppen i } A \quad \forall \text{ öppna } G \subset \mathbb{R}^m, \text{ d.v.s. } f^{-1}G = A \cap V, \text{ där } V \subset \mathbb{R}^n \text{ är öppen.}$$

Sats 3.5. A mätbar och $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kontinuerlig $\Rightarrow f$ mätbar.

Bevis.

$$G \subset \mathbb{R}^m \text{ öppen} \stackrel{(3.4)}{\implies} f^{-1}G \text{ öppen i } A \Rightarrow \exists \text{ öppen mängd } V \subset \mathbb{R}^n \text{ s.a.}$$

$$f^{-1}G = \underbrace{A}_{\text{mätbar}} \cap \underbrace{V}_{\text{mätbar}} \in \text{Leb } \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow f \text{ mätbar.}$$

□

Sats 3.6. Om $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ är mätbar, så är $f^{-1}B$ mätbar för alla Borel-mängder $B \subset \mathbb{R}^m$.

Bevis. Beteckna $\Gamma = \{V \subset \mathbb{R}^m: f^{-1}V \text{ mätbar}\}$. Då är Γ en σ -algebra, ty

$$(1) \quad f^{-1}\emptyset = \emptyset \text{ mätbar} \Rightarrow \emptyset \in \Gamma,$$

$$(2) V \in \Gamma \Rightarrow f^{-1}V^c = \underbrace{A}_{\text{mätbar}} \setminus \underbrace{f^{-1}V}_{\text{mätbar}} \text{ mätbar} \Rightarrow V^c \in \Gamma,$$

$$(3) V_i \in \Gamma, i \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}V_i}_{\text{mätbar}} \text{ mätbar} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i \in \Gamma.$$

Dessutom innehåller Γ de slutna mängderna: F sluten $\Rightarrow F^c$ öppen $\Rightarrow f^{-1}F = \underbrace{(f^{-1}(F^c))^c}_{\text{mätbar}}$ mätbar $\Rightarrow F \in \Gamma$.

Alltså $\Gamma \supset \text{Bor } \mathbb{R}^m$ (= minsta σ -algebran som innehåller de slutna mängderna). □

Korollarium 3.7. f mätbar \Rightarrow Urbilden av intervall och punkter är mätbara.

Exempel 3.8. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ och $\chi_E: \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ vara karakteristiska funktionen till E

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \in E, \\ 0, & \text{om } x \notin E. \end{cases}$$

Påstående: χ_E är en mätbar funktion $\iff E$ är en mätbar mängd.

Bevis. $\boxed{\implies}$ $E = \chi_E^{-1}(1)$ mätbar (K. 3.7).

$\boxed{\impliedby}$ Låt E vara mätbar och $G \subset \mathbb{R}$ öppen.

$$\chi_E^{-1}(G) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & \text{om } \{0, 1\} \subset G, \\ \emptyset, & \text{om } \{0, 1\} \cap G = \emptyset, \\ E, & \text{om } \{0, 1\} \cap G = \{1\}, \\ E^c, & \text{om } \{0, 1\} \cap G = \{0\}. \end{cases}$$

Dessa mängder är mätbara $\Rightarrow \chi_E$ är en mätbar funktion. □

Sats 3.9. Låt $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara mätbar, $A \subset \mathbb{R}^n$, och $g: B \rightarrow \mathbb{R}^k$ kontinuerlig, där $fA \subset B \subset \mathbb{R}^m$. Då är $g \circ f$ mätbar.

Bevis.

$$\left. \begin{array}{l} G \subset \mathbb{R}^k \text{ öppen} \\ g \text{ kontinuerlig} \end{array} \right\} \xrightarrow{(3.4)} g^{-1}G \text{ öppen i } B$$

$$\Rightarrow \exists \text{ öppen mängd } V \subset \mathbb{R}^m \text{ s.a. } g^{-1}G = B \cap V$$

$$\Rightarrow (g \circ f)^{-1}G = f^{-1}(g^{-1}G) = f^{-1}(B \cap V) \stackrel{fA \subset B}{=} f^{-1}(V) \text{ mätbar.}$$

□

Varning: f och g mätbara $\not\Rightarrow g \circ f$ mätbar.

Om $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, så är

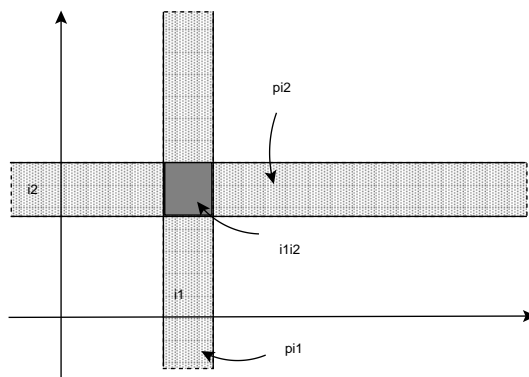
$$f = (f_1, \dots, f_m), f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

där

$$f_j: A \rightarrow \mathbb{R}, f_j(x) = (P_j \circ f)(x) \text{ och } P_j(y_1, \dots, y_m) = y_j \text{ (} P_j \text{ projektion till } j\text{-nde koord.)}$$

Sats 3.10. $f = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ är mätbar $\iff f_j$ är mätbar $\forall j \in \{1, \dots, m\}$.

Bevis. \Rightarrow Om f är mätbar, så är $f_j = P_j \circ f$ mätbar (S. 3.9), ty P_j är kontinuerlig.
 \Leftarrow Antag att f_j är mätbar $\forall j$. Låt $G \subset \mathbb{R}^m$ vara öppen.



Lindelöf $\Rightarrow G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I^{(i)}$, $I^{(i)}$ öppet m -intervall (jfr beviset för S. 2.42)

$$I^{(i)} = I_1^{(i)} \times \dots \times I_m^{(i)} = \bigcap_{j=1}^m P_j^{-1} I_j^{(i)}, \quad I_j^{(i)} \subset \mathbb{R} \text{ öppen}$$

$$f^{-1}G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}I^{(i)} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcap_{j=1}^m f^{-1}P_j^{-1}I_j^{(i)} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcap_{j=1}^m \underbrace{f_j^{-1}I_j^{(i)}}_{\text{mätbar}} \text{ mätbar.}$$

□

Sats 3.11. Summan och produkten av mätbara funktioner $f, g: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ är mätbara (ifall de är definierade). Även λf , $\lambda \in \mathbb{R}$, och $|f|^a$, $a > 0$, är mätbara.

Bevis. Summan. Låt $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ vara mätbara. Beteckna $f + g = u \circ v$, där

$$A \xrightarrow{v} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{u} \mathbb{R}, \quad v = (f, g) \quad \text{och} \quad u(x, y) = x + y.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sats 3.10} \Rightarrow v \text{ mätbar} \\ u \text{ kontinuerlig} \end{array} \right\} \Rightarrow f + g = u \circ v \text{ mätbar.}$$

Obs. Fallet $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ mätbara $\Rightarrow f + g$ mätbar följer ur Sats 3.10.

Låt $f, g: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ vara mätbara. [Summan $f + g$ är definierad om det inte finns ett $x \in A$ så att $f(x) = +\infty$, $g(x) = -\infty$, eller tvärtom.] Beteckna $f + g = h$. Vi vet att A är mätbar (Obs. 1.). å andra sidan gäller att

$$\begin{aligned} A &= h^{-1}(+\infty) \cup h^{-1}(-\infty) \cup A_0, \quad \text{där } A_0 = h^{-1}\mathbb{R}. \\ h^{-1}(+\infty) &= f^{-1}(+\infty) \cup g^{-1}(+\infty) \text{ är mätbar.} \\ h^{-1}(-\infty) &= f^{-1}(-\infty) \cup g^{-1}(-\infty) \text{ är mätbar.} \\ &\Rightarrow A_0 \text{ är mätbar.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f|_{A_0} \text{ och } g|_{A_0} \text{ är mätbara (Obs. 2.)} &\stackrel{1. \text{ delen}}{\implies} h^{-1}G \text{ är mätbar } \forall \text{ öppna } G \subset \mathbb{R} \\ &\Rightarrow h \text{ är mätbar.} \end{aligned}$$

Produkten. På liknande sätt.

λf Specialfall av produkten.

$|f|^a$ $|f|^a = u \circ f$, där $u(x) = |x|^a$ är kontinuerlig om $a > 0$. S. 3.9 $\Rightarrow |f|^a$ är mätbar. □

Härefter betraktar vi enbart funktioner $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

Viktigt fundamentalkriterium:

Sats 3.12. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara mätbar och $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. FVE (= följande villkor är ekvivalenta)

- (1) f är mätbar;
- (2) $E_a = \{x \in A: f(x) < a\}$ är mätbar $\forall a \in \mathbb{R}$;
- (3) $E'_a = \{x \in A: f(x) > a\}$ är mätbar $\forall a \in \mathbb{R}$;
- (4) $E''_a = \{x \in A: f(x) \leq a\}$ är mätbar $\forall a \in \mathbb{R}$;
- (5) $E'''_a = \{x \in A: f(x) \geq a\}$ är mätbar $\forall a \in \mathbb{R}$.

Bevis.

$$E'''_a = A \setminus E_a \quad \text{varav (2)} \iff (5)$$

$$E''_a = A \setminus E'_a \quad \text{varav (3)} \iff (4)$$

$$E''_a = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_{a+1/j} \quad \text{varav (2)} \xrightarrow{\text{S. 2.30}} (4)$$

$$E_a = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E''_{a-1/j} \quad \text{varav (4)} \xrightarrow{\text{S. 2.30}} (2)$$

$$E_a = f^{-1}(\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{öppen}}) \cup f^{-1}(-\infty) \quad \text{varav (1)} \Rightarrow (2)$$

Antag att (2) gäller [och därav även (3),(4),(5)] Påstående: (1) gäller, d.v.s. f är mätbar.

Bevis. Låt $G \subset \mathbb{R}$ vara öppen.

$$G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j, \quad I_j = (a_j, b_j) \text{ öppet intervall (Lindelöf)}$$

$$f^{-1}G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}I_j, \quad f^{-1}I_j = \{x: a_j < f(x) < b_j\} = E'_{a_j} \cap E_{b_j} \text{ mätbar}$$

$$\Rightarrow f^{-1}G \text{ mätbar}$$

$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} E'_j \text{ mätbar}$$

$$f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_{-j} \text{ mätbar}$$

$$\Rightarrow f \text{ mätbar.}$$

□

Anmärkning 3.13. Antagandet " A mätbar" är nödvändigt i Sats 3.12. T.ex. Låt A vara icke-mätbar (S. 2.69) och $x_0 \in A$. Definiera $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{om } x \in A \setminus \{x_0\}, \\ -\infty & \text{om } x = x_0. \end{cases}$$

Då är $E_a = \{x \in A : f(x) < a\} = \{x_0\}$ mätbar $\forall a \in \mathbb{R}$ d.v.s. (2) gäller, men f kan inte vara mätbar (ty A är icke-mätbar) varav (1) inte gäller.

Exempel 3.14. Påstående: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mätbar \iff

$$\begin{cases} (1) & f^2 \text{ är en mätbar funktion,} \\ (2) & E = \{x : f(x) > 0\} \text{ är en mätbar mängd.} \end{cases}$$

Bevis. $\boxed{\Leftarrow}$ Beteckna $E_a = \{x : f(x) < a\}$. Sats 3.12: visa att E_a är mätbar $\forall a \in \mathbb{R}$.

(i) Låt $a > 0$.

$$f(x) < a \iff f(x)^2 < a^2 \text{ eller } f(x) \leq 0, \text{ varav} \\ E_a = \underbrace{\{x : f^2(x) < a^2\}}_{\text{mätbar (1)}} \cup \underbrace{E^c}_{\text{mätbar (2)}} \text{ är mätbar}$$

(ii) Låt $a \leq 0$.

$$f(x) < a \iff f(x)^2 > a^2 \text{ och } f(x) \leq 0, \text{ varav} \\ E_a = \underbrace{\{x : f^2(x) > a^2\}}_{\text{mätbar (1)}} \cap \underbrace{E^c}_{\text{mätbar (2)}} \text{ är mätbar}$$

Sats 3.12 $\Rightarrow f$ mätbar.

$\boxed{\Rightarrow}$ f mätbar $\stackrel{\text{S. 3.11}}{\Rightarrow} f^2 = f \cdot f$ är mätbar. Dessutom: f mätbar $\stackrel{\text{S. 3.12}}{\Rightarrow} E$ mätbar. \square

Anmärkning 3.15. f^2 mätbar $\not\Rightarrow f$ mätbar. Orsak: Låt $E \subset \mathbb{R}$ vara icke-mätbar och $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \in E, \\ -1, & \text{om } x \in E^c. \end{cases}$$

Då är f^2 mätbar som konstanta funktionen $f^2(x) \equiv 1$, men $\{x : f(x) > 0\} = E$ är en icke-mätbar mängd. $\stackrel{\text{S. 3.12}}{\Rightarrow} f$ icke-mätbar.

3.16 lim sup och lim inf för en talföljd

Definition 3.17. Låt a_1, a_2, \dots vara en följd i $\overline{\mathbb{R}}$. Beteckna

$$b_k = \sup_{i \geq k} a_i, \quad c_k = \inf_{i \geq k} a_i. \quad (\text{vi tillåter } b_k, c_k \in \overline{\mathbb{R}})$$

Då är

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_k \geq b_{k+1} \geq \dots \quad \text{och} \\ c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_k \leq c_{k+1} \leq \dots \quad (\text{sup / inf till en mindre mängd})$$

$\Rightarrow \exists$ gränsvärden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} b_k = \beta \quad \text{och} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} c_k = \gamma \quad (\text{vi tillåter } \pm\infty).$$

Vi definierar nu

$$\begin{aligned} \text{limes superior: } \beta &= \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i \text{ eller } \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} a_i \\ \text{limes inferior: } \gamma &= \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i \text{ eller } \underline{\lim}_{i \rightarrow \infty} a_i \end{aligned}$$

Alltså,

$$\begin{aligned}\limsup_{i \rightarrow \infty} a_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{i \geq k} a_i \right) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{i \geq k} a_i \right), \\ \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\inf_{i \geq k} a_i \right) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{i \geq k} a_i \right).\end{aligned}$$

Anmärkning 3.18. (a_i) en följd i $\overline{\mathbb{R}}$ \Rightarrow $\limsup_{i \rightarrow \infty} a_i$ och $\liminf_{i \rightarrow \infty} a_i$ existerar alltid ($\in \overline{\mathbb{R}}$) och är dessutom entydiga.

Exempel 3.19. (1) $\infty, -\infty, \infty, -\infty, \dots$; $b_k = \infty \forall k$, $c_k = -\infty \forall k \Rightarrow \beta = \infty$, $\gamma = -\infty$

(2) $1, 2, 3, 4, \dots$; $b_k = \infty \forall k$, $c_k = k \forall k \Rightarrow \beta = \infty = \gamma$

(3) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$; $b_k = 1 \forall k$, $c_k = 0 \forall k \Rightarrow \beta = 1$, $\gamma = 0$

(4) $0, -1, 0, -2, 0, -3, \dots$; $b_k = 0 \forall k$, $c_k = -\infty \forall k \Rightarrow \beta = 0$, $\gamma = -\infty$.

Sats 3.20. (i) $\liminf_{i \rightarrow \infty} a_i \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i$,

(ii) $a_i \leq M \forall i \geq i_0 \Rightarrow \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i \leq M$,

(iii) $a_i \geq m \forall i \geq i_0 \Rightarrow \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i \geq m$.

Bevis.

(i) $c_k \leq b_k \Rightarrow \gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \beta$,

(ii) $b_k \leq M \forall k \geq i_0 \Rightarrow \beta = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k \leq M$,

(iii) $c_k \geq m \forall k \geq i_0 \Rightarrow \gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k \geq m$.

□

Sats 3.21. Låt (a_i) vara en följd i $\overline{\mathbb{R}}$. Då

$$\exists \lim_{i \rightarrow \infty} a_i \ (\in \overline{\mathbb{R}}) \iff \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i = \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i \ (\in \overline{\mathbb{R}}).$$

I detta fall är

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i = \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i \ (\pm\infty \text{ tillåts}).$$

Bevis. $\boxed{\Rightarrow}$ Antag att $\exists \alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$.

(a1) $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists i_0 \text{ s.a. } \alpha - \varepsilon < a_i < \alpha + \varepsilon \forall i \geq i_0$$

$$\Rightarrow \alpha - \varepsilon \leq c_{i_0} \leq \gamma \leq \beta \leq b_{i_0} \leq \alpha + \varepsilon$$

$$\varepsilon \text{ godt. } \Rightarrow \gamma = \beta$$

(a2) $\alpha = \infty$

$$M \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists i_0 \text{ s.a. } a_i > M \forall i \geq i_0$$

$$\Rightarrow M \leq c_{i_0} \leq \gamma \leq \beta$$

$$M \text{ godt. } \Rightarrow \gamma = \beta = \infty$$

(a3) $\alpha = -\infty$ på liknande sätt

$\square \Leftarrow$ Antag att $\beta = \gamma \stackrel{\text{bet.}}{=} \alpha$.

(b1) $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0 &\Rightarrow \exists k_1 \text{ s.a. } b_k < \alpha + \varepsilon \quad \forall k \geq k_1 \\ &\quad \exists k_2 \text{ s.a. } c_k > \alpha - \varepsilon \quad \forall k \geq k_2 \\ k \geq \max\{k_1, k_2\} &\Rightarrow \alpha - \varepsilon < c_k \leq a_k \leq b_k < \alpha + \varepsilon \\ \varepsilon \text{ godt.} &\Rightarrow \alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \end{aligned}$$

(b2) $\alpha = \infty$

$$\begin{aligned} M \in \mathbb{R} &\Rightarrow \exists k_0 \text{ s.a. } c_k > M \quad \forall k \geq k_0 \\ &\Rightarrow a_k \geq c_k > M \quad \forall k \geq k_0 \\ &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty \end{aligned}$$

(b3) $\alpha = -\infty$ på liknande sätt □

3.22 Gränsvunktions mätbarhet

Sats 3.23. Låt $f_j: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, vara mätbara. Då är funktionerna

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j, \quad \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j, \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j, \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j$$

mätbara. Om $\exists f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$, så är f mätbar.

Anmärkning 3.24. Funktionerna ovan är definierade punktvis $\forall x \in A$. T.ex. funktionens $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j$ värde i punkten $x \in A$ är $\sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Bevis. Beteckna $g(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j(x)$, $x \in A$. För alla $a \in \mathbb{R}$:

$$(3.25) \quad \{x \in A: g(x) \leq a\} \stackrel{(*)}{=} \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \overbrace{\{x \in A: f_j(x) \leq a\}}^{\text{mätbar}} \quad \text{är mätbar} \Rightarrow g = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j \text{ är mätbar.}$$

((*) : $g(x) \leq a \iff f_j(x) \leq a \quad \forall j \in \mathbb{N}$)

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j &= -\sup_{j \in \mathbb{N}}(-f_j) \quad \text{är mätbar,} \\ \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j &= \inf_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{j \geq k} f_j \right) \quad \text{är mätbar [(3.25), (3.26)],} \\ \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{j \geq k} f_j \right) \quad \text{är mätbar [(3.25), (3.26)].} \end{aligned}$$

Om $\exists f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$, så är $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j \stackrel{\text{S. 3.21}}{=} \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j$ mätbar.

Nästan överallt (kortare n.ö.) = förutom mängder med måttet 0. Även nästan varje" (kortare n.v.).

T.ex.

(a) n.v. reellt tal är irrationellt, ty $m(\mathbb{Q}) = 0$.

(b) $e^{-jx^2} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ n.ö. $x \in \mathbb{R}$, ty $m(\{0\}) = 0$.

Sats 3.27. Låt $f, g: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Antag att f är mätbar och $g = f$ n.ö. Då är g mätbar.

Bevis. Låt $A_0 \subset A$ vara sådan att $m(A_0) = 0$ och $f(x) = g(x) \forall x \in A \setminus A_0$. Låt $a \in \mathbb{R}$. Vi betecknar

$$E_a = \underbrace{\{x \in A: f(x) < a\}}_{\text{mätbar}} \quad \text{och} \quad F_a = \{x \in A: g(x) < a\},$$

och visar att F_a är mätbar. Nu är

$$\begin{aligned} F_a &= (F_a \cap A_0) \cup (F_a \setminus A_0), \\ m^*(F_a \cap A_0) &\leq m^*(A_0) = 0 \Rightarrow F_a \cap A_0 \text{ är mätbar.} \end{aligned}$$

å andra sidan är

$$F_a \setminus A_0 = E_a \setminus A_0,$$

som är mätbar. F_a är alltså en union av två mätbara mängder och därav mätbar. \square

Anmärkning 3.28. Nollmängder (mättet 0) inverkar inte på mätbarheten \Rightarrow man kan tala om mätbarheten av funktioner som bara är definierade n.ö.

Sats 3.29. Låt $f_j: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, vara mätbara och $f_j \rightarrow f$ n.ö. $\Rightarrow f$ mätbar.

Bevis. $f = \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j$ n.ö. och $\limsup_{j \rightarrow \infty} f_j$ är mätbar. \square

Exempel 3.30. Antag. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och $\exists f'(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Påstående: Derivatans f' är mätbar.

Bevis. Beteckna

$$g_n(x) = \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}, \quad \text{varav} \quad f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x).$$

$\exists f'(x) \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ kontinuerlig och därav mätbar $\Rightarrow g_n$ mätbar (S. 3.11) $\xrightarrow{\text{S. 3.23}} f'$ mätbar. \square

Tilläggsinformation I Littlewoods tre principer (Se t.ex. Royden):

- (I) Varje mätbar mängd $A \subset \mathbb{R}^n$, med $m(A) < \infty$, är en nästan"ändlig union $F = \bigcup_{j=1}^m I_j$, där I_1, \dots, I_m är n -intervall: $\forall \varepsilon > 0 \exists F = \bigcup_{j=1}^m I_j \subset A$ s.a. $m(A \Delta F) < \varepsilon$, där $A \Delta F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$ (symmetrisk differens").
- (II) Varje mätbar avbildning är nästan kontinuerlig": Lusins sats (Realanalys I): Om $A \subset \mathbb{R}^n$ är begränsad, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ är mätbar och $\varepsilon > 0$, så \exists kompakt $C \subset A$ s.a. $m(A \setminus C) < \varepsilon$ och $f|_C$ är kontinuerlig.
- (III) Varje konvergerande följd av mätbara funktioner $f_j: A \rightarrow \mathbb{R}$ är nästan likformigt konvergerande": Egorovs sats (Realanalys I): Låt $A \subset \mathbb{R}^n$, $m(A) < \infty$, $f_j: A \rightarrow \mathbb{R}$ är mätbara och $f_j \rightarrow f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ n.ö. Då $\exists \forall \varepsilon > 0$ en kompakt $C \subset A$ s.a. $m(A \setminus C) < \varepsilon$ och $f_j|_C \rightarrow f|_C$ likformigt (d.v.s. $\sup_{x \in C} |f_j(x) - f(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$).

Tilläggsinformation II Låt (Ω, Γ, μ) vara ett sannolikhetsrum. Funktionen $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ är en slumpvariabel om

$$\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(-\infty, x] \in \Gamma \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}.$$

Kan bevisas: Sats 3.12 gäller även för dessa, och

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ slumpvariabel} \iff X \text{ är en } \Gamma\text{-mätbar funktion } \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

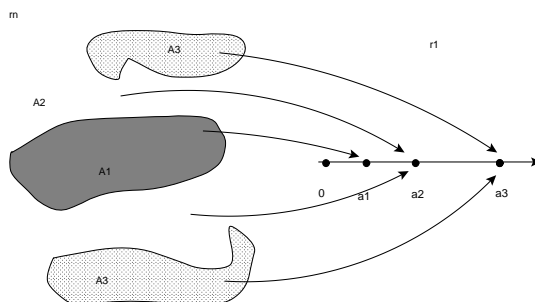
4 Lebesgueintegralen

4.1 Enkla funktioner

Definition 4.2. Låt (X, \mathcal{M}) vara ett mätbart rum. Funktionen $f: X \rightarrow [0, \infty)$ är *enkla*, om

- (1) f är mätbar,
- (2) f antar ändligt många värden.

Vi betecknar mängden av alla enkla funktioner på X med Y (eller $Y(X)$).



Anmärkning 4.3. 1. Enligt definitionen har vi $f \in Y \Rightarrow f(x) \neq \infty \forall x \in X$.

2. $f \in Y, E \in \mathcal{M} \Rightarrow f\chi_E \in Y$.

Låt $f \in Y$ anta värdena $a_1, \dots, a_k \in [0, +\infty)$. Då är

$$A_i = f^{-1}(a_i) \text{ mätbara och disjunkta, } X = \bigcup_{i=1}^k A_i$$

och

$$f = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i} \text{ är normalframställningen till } f.$$

Definition 4.4. Låt (X, \mathcal{M}, μ) vara ett måtttrum och låt $f \in Y$ ha normalframställningen $f = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i}$. Då är f 's *integral* (över X med avseende på måttet μ)

$$I(f) = \sum_{i=1}^k a_i \mu(A_i). \quad (\text{kom ihåg konventionen } 0 \cdot \infty = 0)$$

Om $E \subset X$ är mätbar, så är f 's integral över E

$$I(f, E) = I(f\chi_E).$$

Speciellt gäller:

$$I(f) = I(f, E),$$

$$0 \leq I(f, E) \leq \infty,$$

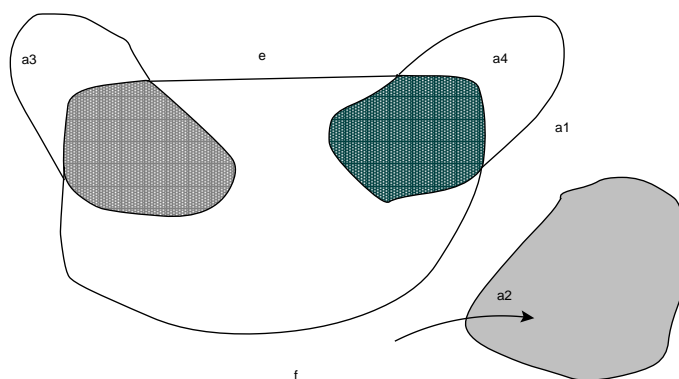
$$E \in \mathcal{M} \Rightarrow I(\chi_E) = \mu(E).$$

Sats 4.5. Om $f \in Y$ har normalframställningen $\sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i}$, så är

$$I(f, E) = \sum_{i=1}^k a_i \mu(A_i \cap E).$$

Bevis.

$$(4.6) \quad f\chi_E = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i} \chi_E = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i \cap E} \quad (\text{inte nödvändigtvis normalframställning}).$$



Normalframställningen av $f\chi_E$ fås ur (4.6)

- (1) genom att ta bort termerna för vilka $A_j \cap E = \emptyset$
 - (2) om $a_j = 0$ för något $j \in \{1, \dots, k\}$, tillsätter vi $X \setminus E$ i mängden A_j och betecknar den nya mängden med A_j
 - (3) om $a_i \neq 0 \forall i \in \{1, \dots, k\}$, tillsätter vi $a_{k+1} \chi_{A_{k+1}}$ i summan med $a_{k+1} = 0$ och $A_{k+1} = \mathbb{R}^n \setminus E$
- } $a_j \mu(A_j \cap E) = 0$ för dessa
- } då är $a_{k+1} \mu(A_{k+1}) = 0$

$$\Rightarrow I(f, E) = I(f\chi_E) = \sum_{i=1}^k a_i \mu(A_i \cap E) + a_{k+1} \mu(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^k a_i \mu(A_i \cap E).$$

□

Sats 4.7. Låt $E_j, j \in \mathbb{N}$, vara mätbara och disjunkta, och $E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j$. Om $f \in Y$, så är

$$I(f, E) = \sum_{j \in \mathbb{N}} I(f, E_j).$$

Bevis. Låt $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ vara normalframställningen.

$$\text{S. 4.5} \Rightarrow I(f, E) = \sum_{i=1}^k a_i \mu(A_i \cap E).$$

I och med att $A_i \cap E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A_i \cap E_j)$, så är (S. 2.30)

$$\begin{aligned} \mu(A_i \cap E) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_i \cap E_j) \quad \forall i = 1, \dots, k \\ \Rightarrow I(f; E) &= \sum_{i=1}^k a_i \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^k a_i \mu(A_i \cap E_j) \\ &\stackrel{4.5}{=} \sum_{j \in \mathbb{N}} I(f, E_j). \end{aligned}$$

□

Anmärkning 4.8. Det är klart att $I(f, \emptyset) = I(f \chi_{\emptyset}) = I(0) = 0$. Det följer därför av Sats 4.7 att avbildningen

$$\mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty], \quad E \mapsto I(f, E)$$

är ett mått för varje given funktion $f \in Y$.

Konvergenssatsen 2.60 ger nu följande resultat.

Korollarium 4.9. Om $f \in Y$ och $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ är mätbara, så är

$$I \left(f, \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} I(f, E_j).$$

Sats 4.10. Låt $f, g \in Y$, E vara mätbar och $a \geq 0$ vara en konstant. Då gäller

$$(i) \quad f + g \in Y \text{ och } I(f + g, E) = I(f, E) + I(g, E);$$

$$(ii) \quad af \in Y \text{ och } I(af, E) = aI(f, E).$$

Bevis. (i): $f + g \in Y$ klart.

(a) Låt $E = X$ och

$$f = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j}, \quad g = \sum_{i=1}^{\ell} b_i \chi_{B_i}$$

vara normalframställningar. Då är

$$(f + g) \chi_{A_i \cap B_j} = (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j} \quad \forall i, j \quad \stackrel{4.5}{\Rightarrow}$$

$$(4.11) \quad \begin{cases} I(f + g, A_i \cap B_j) &= (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) = a_i \mu(A_i \cap B_j) + b_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= I(f, A_i \cap B_j) + I(g, A_i \cap B_j) \end{cases}$$

$X = \text{union av disjunkta mängder } A_i \cap B_j$. Sats 4.7 \Rightarrow

$$\begin{aligned} I(f+g) &\stackrel{4.7}{=} \sum_{i,j} I(f+g, A_i \cap B_j) \stackrel{(4.11)}{=} \sum_{i,j} I(f, A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} I(g, A_i \cap B_j) \\ &\stackrel{4.7}{=} I(f) + I(g) \end{aligned}$$

(b) E godtycklig.

$$\begin{aligned} I(f+g, E) &= I((f+g)\chi_E) = I(f\chi_E + g\chi_E) = I(f\chi_E) + I(g\chi_E) \\ &= I(f, E) + I(g, E). \end{aligned}$$

(ii): $af \in Y$ klart.

$$a = 0 \Rightarrow I(af, E) = 0 = aI(f, E).$$

Låt $a > 0$ och $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ vara normalframställningen.

$$\begin{aligned} af &= \sum_{i=1}^k aa_i \chi_{A_i} \quad \text{normalframställning.} \\ I(af, E) &= \sum_{i=1}^k aa_i m(A_i \cap E) = a \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E) = aI(f, E). \end{aligned}$$

□

Monotonitetsegenskaper.

Sats 4.12. (1) E mätbar och $f, g \in Y$, $f \leq g$ (d.v.s. $f(x) \leq g(x) \forall x$) $\Rightarrow I(f, E) \leq I(g, E)$;

(2) $E \subset F$ mätbara, $f \in Y \Rightarrow I(f, E) \leq I(f, F)$;

(3) $f \in Y$, $\mu(E) = 0 \Rightarrow I(f, E) = 0$.

Bevis. (1): $g = f + (g - f)$, där $g - f \geq 0$ och $g - f \in Y$. Sats 4.10 \Rightarrow

$$I(g, E) \stackrel{4.10}{=} I(f, E) + \underbrace{I(g - f, E)}_{\geq 0} \geq I(f, E).$$

(2):

$$\left. \begin{array}{l} E \subset F \Rightarrow 0 \leq \chi_E \leq \chi_F \\ f \in Y \end{array} \right\} \Rightarrow f\chi_E \leq f\chi_F \quad (\in Y)$$

$$\Rightarrow I(f, E) = I(f\chi_E) \stackrel{(1)}{\leq} I(f\chi_F) = I(f, F).$$

(3): Om $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ är normalframställningen, så är

$$I(f, E) = \sum_{i=1}^k a_i \underbrace{\mu(A_i \cap E)}_{=0} = 0, \quad \text{ty } A_i \cap E \subset E \text{ och } \mu(E) = 0. \quad \square$$

4.13 Lebesgueintegralen, $f \geq 0$

Sats 4.14. Låt (X, \mathcal{M}) vara ett mätbart rum och låt $f: X \rightarrow [0, \infty]$ vara mätbar. Då finns det en följd av sådana enkla funktioner f_n att

- (a) $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f$,
 (b) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$.

Bevis. Definiera för $n \in \mathbb{N}$ och för $i \in \{1, 2, \dots, n2^n\}$ mängderna

$$E_{n,i} = f^{-1}([(i-1)2^{-n}, i2^{-n})), \quad F_n = f^{-1}([n, \infty))$$

och sedan de enkla funktionerna

$$f_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{F_n}$$

Eftersom både halvöppna intervall $[a, b)$ och intervall av typen $[a, \infty)$ är Borelmängder och f är mätbar så är mängderna $E_{n,i}$ och F_n mätbara. Enligt konstruktionen gäller (a). Om $f(x) < \infty$ så gäller $f_n(x) \geq f(x) - 2^{-n}$ för alla tillräckligt stora heltal n . Om $f(x) = \infty$ så är $f_n(x) = n$. I bägge fallen konvergerar $f_n(x)$ mot $f(x)$ vilket visar att (b) gäller. \square

Definition 4.15. Låt $f: X \rightarrow [0, \infty]$ vara mätbar. Då är f 's (Lebesgue)integral över X

$$\int f = \sup\{I(\varphi) : \varphi \in Y, \varphi \leq f\}.$$

Om $E \subset \mathbb{R}^n$ är mätbar, så är f 's integral över E

$$(4.16) \quad \int_E f = \int f \chi_E.$$

Vi betecknar även

$$\int_E f = \int_E f \, dm = \int_E f(x) \, dm(x), \quad m = n\text{-dimensionella Lebesguemåttet}.$$

Om $n = 1$ och $E = [a, b]$, så betecknar vi $\int_E f = \int_a^b f = \int_a^b f(x) \, dx$.

Beteckningsöverenskommelse. Om $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ och $E \subset A$, så definierar vi $f \chi_E: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$f \chi_E(x) = \begin{cases} f(x), & \text{om } x \in E, \\ 0, & \text{om } x \notin E. \end{cases}$$

Då definierar (4.16) $\int_E f$ för alla mätbara $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ och mätbara $E \subset A$.

Sats 4.17. $f \in Y$ och E mätbar $\Rightarrow I(f, E) = \int_E f$.

Bevis. Vi kan anta $E = \mathbb{R}^n$ (annars ersätter vi f med funktionen $f \chi_E \in Y$).

(a) $f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$.

(b) $\varphi \in Y, \varphi \leq f \xrightarrow{\text{S. 4.12}^{(1)}} I(\varphi) \leq I(f) \Rightarrow \int f \leq I(f)$.

□

Integralens grundegenskaper.

Sats 4.18. Antag att funktionerna i fråga är både icke-negativa och mätbara, och att mängderna i fråga är mätbara delmängder i \mathbb{R}^n .

- (1) $f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$
 (2) $A \subset B \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$
 (3) $f(x) = 0 \forall x \in E \Rightarrow \int_E f = 0$
 (4) $m(E) = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$
 (5) $0 \leq a < \infty \Rightarrow \int_E af = a \int_E f$.

Bevis. (1): Låt $E = \mathbb{R}^n$, $\varphi \in Y$, $\varphi \leq f \Rightarrow \varphi \leq g \Rightarrow$

$$I(\varphi) \leq \int g \stackrel{\text{sup}}{\implies} \int f \leq \int g.$$

$E \in \text{Leb } \mathbb{R}^n \Rightarrow f\chi_E \leq g\chi_E \text{ i } \mathbb{R}^n \stackrel{(1)}{\implies}$

$$\int_E f = \int f\chi_E \leq \int g\chi_E = \int_E g.$$

(2): $f\chi_A \leq f\chi_B$ och (1) \Rightarrow påst.

(3): $f\chi_E = 0 \Rightarrow \int_E f = I(0) = 0$.

(4): Låt $\varphi \in Y$, $\varphi \leq f\chi_E$. Eftersom $\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus E} = 0$, så är $\varphi = \varphi\chi_E$, varav

$$I(\varphi) = I(\varphi, E) \stackrel{4.12(3)}{=} 0 \stackrel{\text{sup}}{\implies} \int_E f = 0.$$

(5): Om $a = 0$, så är båda sidorna noll. Låt $a > 0$, $\varphi \in Y$, $\varphi \leq f\chi_E \Rightarrow a\varphi \leq af\chi_E \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_E af &\geq I(a\varphi) \stackrel{4.10(ii)}{=} aI(\varphi) \Rightarrow \int_E af \geq a \int_E f. \\ f = \frac{1}{a}(af) &\Rightarrow \int_E f = \int_E \frac{1}{a}(af) \stackrel{\text{ovan}}{\geq} \frac{1}{a} \int_E af \Rightarrow a \int_E f \geq \int_E af. \end{aligned}$$

□

Samband med Riemann-integralen.

Sats 4.19. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara begränsad och $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mätbar, $f \geq 0$. Om f är Riemann-integrerbar över E , så är

$$(\text{Riemann-integralen}) \quad (\mathbb{R}) \int_E f = \int_E f \quad (\text{Lebesgue-integralen})$$

Detta gäller t.ex. då E är ett slutet n -intervall och f är kontinuerlig.

Bevis. Välj ett slutet n -intervall $I \supset E$. Eftersom

$$(\mathbb{R}) \int_E f = (\mathbb{R}) \int_I f \chi_E \quad \text{och} \quad \int_E f = \int f \chi_E = \int_I f \chi_E,$$

enligt definitionen, kan vi anta (genom att ersätta f med funktionen $f \chi_E$) att $E = I$. Låt $D = \{I_1, \dots, I_k\}$ vara en delning till I i ("halvöppna") disjunkta delintervall. Beteckna

$$\begin{aligned} g_i &= \inf_{x \in I_i} f(x), \quad \bar{g}_i = \inf_{x \in \bar{I}_i} f(x) \quad \Rightarrow \quad \bar{g}_i \leq g_i \quad \text{och} \\ G_i &= \sup_{x \in I_i} f(x), \quad \bar{G}_i = \sup_{x \in \bar{I}_i} f(x) \quad \Rightarrow \quad \bar{G}_i \geq G_i. \end{aligned}$$

Riemanns undersumma

$$m_D = \sum_{i=1}^k \bar{g}_i \ell(I_i) \leq \sum_{i=1}^k g_i m(I_i) = I(\varphi),$$

där $\varphi = \sum_{i=1}^k g_i \chi_{I_i} \in Y$. Likväl är översumman

$$M_D = \sum_{i=1}^k \bar{G}_i \ell(I_i) \geq \sum_{i=1}^k G_i m(I_i) = I(\psi),$$

där $\psi = \sum_{i=1}^k G_i \chi_{I_i} \in Y$. Det är klart att $\varphi \leq f \leq \psi$, varav

$$(4.20) \quad m_D \leq I(\varphi) \stackrel{\sup}{\leq} \int_E f \stackrel{f \leq \psi}{\leq} \int_E \psi = I(\psi) \leq M_D.$$

Antagande: f Riemann-integrerbar över $E \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ delning D som ovan s.a.

$$(4.21) \quad m_D \leq (\mathbb{R}) \int_E f \leq M_D \quad (\text{gäller alltid}) \quad \text{och} \quad 0 \leq M_D - m_D < \varepsilon.$$

Låt $\varepsilon \rightarrow 0$, varav (4.20) och (4.21) \Rightarrow

$$(\mathbb{R}) \int_E f = \int_E f.$$

□

Anmärkning 4.22. Fallet då E är obegränsad (en oegentlig Riemann-integral) är mer komplicerat. Motsvarigheten till Sats 4.19 gäller om $f \geq 0$, men inte i det allmänna fallet.

Lebesgueintegralen är mer allmän än Riemann-integralen:

Exempel 4.23. Låt $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, \mathbb{Q} = de rationella talen. f är enkel, ty $f^{-1}(1) = \mathbb{Q}$ och $f^{-1}(0) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mätbara.

$$\int_E f = m(E \cap \mathbb{Q}) = 0 \quad \forall \text{ mätbara } E \subset \mathbb{R}.$$

å andra sidan är f inte Riemann-integrerbar över något intervall $[a, b]$, $a < b$: Låt $D = \{I_1, \dots, I_k\}$ vara en delning till intervallet $[a, b]$. Varje I_i innehåller både rationella och irrationella tal

$$\Rightarrow m_D = \sum_i 0 \cdot \ell(I_i) = 0 \quad \text{och} \quad M_D = \sum_i 1 \cdot \ell(I_i) = b - a.$$

Sats 4.24. Låt $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ vara mätbar, $f \geq 0$ och $\int_E f < \infty$. Då är $f(x) < \infty$ för n.v. $x \in E$.

Bevis. Beteckna $A = \{x \in E: f(x) = \infty\}$ (mätbar mängd, ty f är mätbar).

$$\begin{aligned} f(x) \geq j \quad \forall x \in A, \quad j = 1, 2, \dots &\Rightarrow j\chi_A \leq f\chi_E \quad \forall j \\ \Rightarrow \int_E f &\geq I(j\chi_A) = jm(A) \quad \forall j \\ 0 \leq m(A) &\leq \frac{1}{j} \underbrace{\int_E f}_{< \infty} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow m(A) = 0. \end{aligned}$$

□

Monotona konvergenssatsen.

Sats 4.25. (MKS) Låt $f_j: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ vara mätbara,

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_j \leq f_{j+1} \leq \dots$$

Då är

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j = \int_E \lim_{j \rightarrow \infty} f_j \quad (\text{vi kan ha } +\infty).$$

Bevis. $f_j \leq f_{j+1} \Rightarrow \int_E f_j \leq \int_E f_{j+1} \Rightarrow \exists$ gränsvärde $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j = a \in [0, \infty]$. Likaså $\exists f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$, som är mätbar (S. 3.23).

$$f_j \leq f \Rightarrow \int_E f_j \leq \int_E f \Rightarrow a \leq \int_E f.$$

Vi bör visa: $\int_E f \leq a$.

Vi kan anta: $E = \mathbb{R}^n$ (annars ersätter vi f_j, f med funktionerna $f_j\chi_E, f\chi_E$ (notera att $f_j\chi_E \nearrow f\chi_E$)).

Låt $0 < b < 1, \varphi \in Y, \varphi \leq f$. Beteckna

$$E_j = \{x \in \mathbb{R}^n: f_j(x) \geq b\varphi(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^n: (f - b\varphi)(x) \geq 0\} \quad (\text{mätbar mängd}).$$

$$f_j(x) \leq f_{j+1}(x) \quad \forall x, \quad \forall j \Rightarrow E_j \subset E_{j+1} \quad \forall j.$$

Påstående: $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$.

Låt $x \in \mathbb{R}^n$ vara godtycklig.

Om $\varphi(x) = 0$, så $x \in E_1$.

Om $\varphi(x) > 0$ så är $b\varphi(x) < \varphi(x) \leq f(x)$ (ty $0 < b < 1$ och $\varphi(x) < \infty$).

$$\Rightarrow \exists j \text{ s.a. } b\varphi(x) \leq f_j(x) \Rightarrow x \in E_j.$$

$$\text{Alltså är } \mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

$$\begin{aligned}
& f_j \geq f_j \chi_{E_j} \geq b\varphi \chi_{E_j} \\
\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f_j & \geq \int_{\mathbb{R}^n} b\varphi \chi_{E_j} = bI(\varphi, E_j) \xrightarrow{4.9} bI(\varphi, \underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j}_{=\mathbb{R}^n}) = bI(\varphi), \text{ då } j \rightarrow \infty \\
& \Rightarrow a = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j \geq bI(\varphi) \quad \forall \varphi \in Y, \varphi \leq f \\
& \xrightarrow{\text{sup}} a \geq b \int_{\mathbb{R}^n} f \quad \forall 0 < b < 1 \\
& \xrightarrow{b \rightarrow 1^-} a \geq \int_{\mathbb{R}^n} f.
\end{aligned}$$

□

Anmärkning 4.26. Man får inte alltid byta ordningen på operationerna \int och \lim : t.ex.

$$\begin{aligned}
& f_j = j\chi_{(0,1/j)}, \quad f_j \in Y, \quad I(f_j) = j \frac{1}{j} = 1 \quad \forall j \\
& f_j(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \lim_{j \rightarrow \infty} f_j & = 0 \neq 1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_j \quad (\text{följden } (f_j) \text{ är inte växande}).
\end{aligned}$$

Exempel 4.27. (Gammal provuppgift) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

Lösning. Analys I \Rightarrow räcker att betrakta gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2} dt$$

för alla följder (x_n) , s.a. $x_n \geq x_{n+1} > 0$ och $x_n \searrow 0$. Beteckna

$$f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}, \quad t \in [0, \infty) \text{ och } n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned}
& x_n \geq x_{n+1} > 0 \text{ och } t \in [0, \infty) \Rightarrow e^{-x_n t} \leq e^{-x_{n+1} t} \\
& \Rightarrow 0 \leq f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-x_{n+1} t}}{1+t^2} = f_{n+1}(t)
\end{aligned}$$

d.v.s. (f_n) är en växande följd. Dessutom gäller att

$$f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{0 \cdot t}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} \quad \forall t \in [0, \infty).$$

MKS \Rightarrow

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(t) dt & = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \stackrel{(*)}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^j \frac{1}{1+t^2} dt \\
& \stackrel{4.19}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^j \arctan t = \lim_{j \rightarrow \infty} (\arctan j - \arctan 0) = \pi/2.
\end{aligned}$$

(*): MKS tillämpad på den växande följderna (g_j) ,

$$g_j(t) = \frac{\chi_{[0,j]}(t)}{1+t^2}.$$

(Obs. I Sats 4.19 antog vi att E är begränsad.)

Sats 4.28. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara mätbar och $f_1, \dots, f_k: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mätbara s.a. $f_j \geq 0$. Då är

$$\int_E \sum_{j=1}^k f_j = \sum_{j=1}^k \int_E f_j.$$

Bevis. Vi kan anta: $E = \mathbb{R}^n$ och $k = 2$ (yallmänna k med induktion). Approximeringssatsen 4.14 $\Rightarrow \exists$ växande följderna $(\varphi_j), (\psi_j)$ enkla funktioner s.a.

$$\varphi_j \nearrow f_1 \quad \text{och} \quad \psi_j \nearrow f_2, \quad \text{då } j \rightarrow \infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} 4.10 \Rightarrow I(\varphi_j + \psi_j) = I(\varphi_j) + I(\psi_j) \\ \text{MKS} \Rightarrow I(\varphi_j) = \int \varphi_j \rightarrow \int f_1 \quad \text{och} \quad I(\psi_j) \rightarrow \int f_2 \\ \text{likaså } \varphi_j + \psi_j \nearrow f_1 + f_2 \quad \text{och MKS} \Rightarrow \\ I(\varphi_j + \psi_j) \rightarrow \int (f_1 + f_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2.$$

□

Beppo Levis sats.

Sats 4.29. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara mätbar och $f_j: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mätbara s.a. $f_j \geq 0$. Då är

$$\int_E \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} f_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_E f_j.$$

D.v.s. en serie med positiva termer får integreras termvis.

Bevis. Beteckna $u_k = \sum_{j=1}^k f_j$. Då är

$$0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \quad \text{och} \quad u_k \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} f_j \stackrel{\text{bet.}}{=} u.$$

MKS och S. 4.28 \Rightarrow

$$\int_E u = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} u_k \stackrel{\text{MKS}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E u_k \stackrel{4.28}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_E f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j.$$

□

Följande konvergenssats är också väldigt viktig!

Sats 4.30. (Fatous lemma). Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara mätbar och $f_j: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mätbara s.a. $f_j \geq 0 \forall j \in \mathbb{N}$. Då är

$$\int_E \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j \quad (\text{vi kan ha } +\infty).$$

Bevis. Beteckna

$$g_k(x) = \inf_{j \geq k} f_j(x), \quad x \in E.$$

Då är

$$\begin{aligned} 0 &\leq g_k \leq g_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ g_k &\text{ mätbar (S. 3.23)} \\ g_k &\leq f_k \quad \text{och} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \\ \text{MKS} &\Rightarrow \int_E \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \stackrel{\text{MKS}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k \leq_{g_k \leq f_k} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k. \end{aligned}$$

□

Exempel 4.31. (1)

$$\begin{aligned} f_j &= j\chi_{(0,1/j]} \\ \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = 0 \\ \int_{\mathbb{R}} f_j &= 1 \quad \forall j \end{aligned}$$

Fatou gäller i formen $0 \leq 1$.

(2)

$$\begin{aligned} f_j &= \chi_{[j,2j]} \\ \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = 0 \\ \int_{\mathbb{R}} f_j &= m([j,2j]) = j \rightarrow \infty \quad \text{kun } j \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Fatou gäller i formen $0 \leq \infty$.

Integralen som mängdfunktion är ett mått:

Sats 4.32. Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ vara mätbar, $f \geq 0$. Då är avbildningen

$$\text{Leb } \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty], \quad E \mapsto \int_E f$$

ett mått, d.v.s.

(i)

$$\int_{\emptyset} f = 0,$$

(ii) om $E_j \subset \mathbb{R}^n$ är mätbara och disjunkta, så är

$$\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f.$$

Speciellt:

(iii) $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n$ mätbara \Rightarrow

$$\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{E_j} f,$$

(iv) $\mathbb{R}^n \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$ mätbara och $\int_{E_1} f < \infty \Rightarrow$

$$\int_{\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j} f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{E_j} f,$$

Bevis. (i): S. 4.18 (4); (ii): Övningsuppgift; (iii) och (iv): Måttets konvergenssats 2.60 och 2.61. □

Sats 4.33. (i) Låt $f, g: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ vara mätbara och $f \geq 0, g \geq 0$. Om $f = g$ n.ö. i E , så är

$$\int_E f = \int_E g.$$

Speciellt: $f \geq 0$ mätbar och definierad n.ö. i $E \Rightarrow \int_E f$ väl definierad.

(ii) Låt $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ vara mätbar, $f \geq 0$. Om $\int_E f = 0$, så är $f = 0$ n.ö. i E .

Bevis. (i): Beteckna $A = \{x \in E: f(x) \neq g(x)\}$. Antagande $\Rightarrow m(A) = 0$.

$$\int_E f \stackrel{4.32}{=} \underbrace{\int_{E \setminus A} f}_{f=g} + \underbrace{\int_A f}_{=0} = \int_{E \setminus A} g + \int_A g = \int_E g.$$

(ii): Antites: $m(\{x \in E: f(x) > 0\}) > 0$. Övningsuppgift $\Rightarrow \exists r > 0$ s.a.

$$\begin{aligned} & m(\underbrace{\{x \in E: f(x) > r\}}_{\text{bet. } = A}) > 0 \\ \Rightarrow \int_E f & \stackrel{(*)}{\geq} \int_A f \stackrel{(**)}{\geq} r \int_A \chi_A = rm(A) > 0. \quad \underline{\text{MS}} \quad \square \\ & [(*): A \subset E, \quad (**): f\chi_A \geq r\chi_A] \end{aligned}$$

Tilläggsinformation: Låt (X, Γ, μ) vara ett måttrum, f en Γ -mätbar funktion $X \rightarrow [0, \infty]$. Definiera integralen till f

$$\begin{aligned} \int_X f &= \sup\{I(\varphi): \varphi: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ enkel, } \varphi \leq f\}, \\ \int_E f &= \int_X f\chi_E, \quad \text{då } E \in \Gamma. \end{aligned}$$

Resultaten i kapitel 4.13 är i kraft (förutom Sats 4.19 (Riemann-int.)). I bevisen ersätter vi \mathbb{R}^n med X och $\text{Leb } \mathbb{R}^n$ med σ -algebran $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$. Ofta antar man att X har ett s.k. σ -ändligt mått, d.v.s.

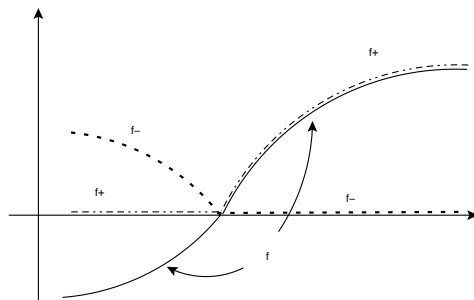
$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \quad \text{där } \Omega_j \in \Gamma, \mu(\Omega_j) < \infty \text{ för alla } j.$$

4.34 Lebesgueintegralen: funktioner som byter tecken

Låt $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ vara mätbar, $E \subset \mathbb{R}^n$. Beteckna

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad (= \frac{1}{2}(|f| + f) \text{ mätbar})$$

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} \quad (= \frac{1}{2}(|f| - f) \text{ mätbar}).$$



Då är

$$f^+(x) \geq 0, \quad f^-(x) \geq 0$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

(Obs. ovan uppstår inte fallet $\infty - \infty$, för vi har alltid $f^+(x) = 0$ eller $f^-(x) = 0$.)

Kapitel 4.13 \Rightarrow

$$\int_E f^+ \quad \text{och} \quad \int_E f^- \quad \text{definierade} \quad (\in [0, +\infty]).$$

Kan vi alltid definiera

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \quad (\text{jfr. } f = f^+ - f^-)?$$

Nej, ty vi kan få $\infty - \infty$, som inte är definierat!

Definition 4.35. Funktionen $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ är integrerbar i E (el. kortare integrerbar), om f är mätbar och om $\int_E f^+ < \infty$ och $\int_E f^- < \infty$. Då är f 's integral över E

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \quad (\in \mathbb{R}).$$

Sats 4.36. Funktionen $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ är integrerbar i $E \iff f$ är mätbar och

$$\int_E |f| < \infty.$$

Då gäller att

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$

Bevis. \Rightarrow Mätbarheten innehålls i definitionen. Dessutom är

$$|f| = \underbrace{f^+}_{\geq 0} + \underbrace{f^-}_{\geq 0} \stackrel{4.28}{\implies} \int_E |f| = \underbrace{\int_E f^+}_{< \infty} + \underbrace{\int_E f^-}_{< \infty} < \infty.$$

\Leftarrow

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq f^+ \leq |f| &\Rightarrow \int_E f^+ \leq \int_E |f| < \infty \\ 0 \leq f^- \leq |f| &\Rightarrow \int_E f^- \leq \int_E |f| < \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ integrerbar i } E.$$

Dessutom:

$$\begin{aligned} \left| \int_E f \right| &= \left| \int_E f^+ - \int_E f^- \right| \leq \underbrace{\left| \int_E f^+ \right|}_{\geq 0} + \underbrace{\left| \int_E f^- \right|}_{\geq 0} = \int_E f^+ + \int_E f^- \\ &\stackrel{4.28}{=} \int_E (f^+ + f^-) = \int_E |f|. \quad \square \end{aligned}$$

Anmärkning 4.37. f integrerbar i $E \stackrel{4.24, 4.36}{\implies} |f(x)| < \infty$ för n.v. $x \in E$.

Sats 4.38. (Majorantprincipen) Om $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ är mätbar, $|f| \leq g$ och g integrerbar i E , så är f integrerbar i E .

Bevis.

$$\int_E |f| \leq \int_E g < \infty \quad \square$$

Anmärkning 4.39. Det räcker att $|f| \leq g$ n.ö. i E , d.v.s.

$$m(\underbrace{\{x \in E : |f(x)| > g(x)\}}_{=A}) = 0, \quad \text{varav} \quad \int_E |f| = \underbrace{\int_{E \setminus A} |f|}_{< \infty} + \underbrace{\int_A |f|}_{=0} < \infty.$$

Sats 4.40. Om $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ är mätbar och Riemann-integrerbar, så är f Lebesgue-integrerbar i E och

$$\int_E f = (\mathbb{R}) \int_E f.$$

Bevis.

$$\begin{aligned} f^+ &= \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \quad \text{Riem.-integrerbara} \\ &\stackrel{4.19}{\implies} f^+ \text{ och } f^- \text{ Leb.-integrerbara och Riem./Leb.-integralerna lika} \\ &\Rightarrow \int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = (\mathbb{R}) \int_E f^+ - (\mathbb{R}) \int_E f^- = (\mathbb{R}) \int_E f. \quad \square \end{aligned}$$

Exempel 4.41. Låt $E = [1, \infty)$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2} \sin x$. f kontinuerlig $\Rightarrow f$ mätbar.

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq x^{-2} \stackrel{\text{bet.}}{=} g(x), \\ g &\text{ integrerbar i } E \stackrel{4.38}{\implies} f \text{ integrerbar i } E. \end{aligned}$$

Obs. g integrerbar p.g.a. MKS tillämpad på en växande följd (g_j) , $g_j(x) = \begin{cases} g(x), & \text{då } 1 \leq x \leq j \\ 0, & \text{då } x > j, \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_E g \stackrel{\text{MKS}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E g_j \stackrel{4.19}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_1^j x^{-2} dx = - \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} x^{-1} = \lim_{j \rightarrow \infty} (1 - 1/j) = 1.$$

Exempel 4.42. Låt $E = [1, \infty)$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-1} \sin x$. f kontinuerlig $\Rightarrow f$ mätbar.
Påståande: f är inte Leb.-integrerbar i E .

$$\int_E |f| = \int_1^\pi |f| + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|} dx}_{\text{harm. serie}} \geq \int_1^\pi |f| + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty,$$

ty

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|} dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx \stackrel{\text{period.}}{=} \frac{1}{(k+1)\pi} \underbrace{\int_0^\pi |\sin x| dx}_{=2}.$$

f är alltså inte integrerbar i E .

Ändå \exists oegentlig (Riemann-)integral

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \underbrace{\int_1^c \frac{\sin x}{x} dx}_{=I(c)}.$$

Bevis.

$$I(n\pi) = \int_1^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{alternerande serie}},$$

där

$$\left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right| \searrow 0, \text{ kun } k \rightarrow \infty.$$

Leibnitz sats \Rightarrow serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

konvergerar, d.v.s.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} I(n\pi) \stackrel{\text{bet.}}{=} a.$$

Om $c \geq \pi$, så $c \in [n\pi, (n+1)\pi)$ för något $n \in \mathbb{N}$, varav

$$\begin{aligned} |I(c) - I(n\pi)| &= \left| \int_{n\pi}^c \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_{n\pi}^c \frac{1}{n\pi} dx \leq \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow I(c) \rightarrow a, \text{ då } c \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Alltså: Oegentliga (Riemann-)integralen till en funktion kan existera (d.v.s. konvergera), fastän funktionen inte är Lebesgue-integrerbar. Lebesgue-integrerbarheten kräver absolut konvergens.

Sats 4.43. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara mätbar, $f, g: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrerbara i E och $\lambda \in \mathbb{R}$. Då är

- (i) $f + g$ integrerbar i E och $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$;
(ii) λf integrerbar i E och $\int_E \lambda f = \lambda \int_E f$;
(iii) $f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$;
(iv) $m(E) = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$;
(v) $f = g$ n.ö. i $E \Rightarrow \int_E f = \int_E g$.

Anmärkning 4.44. f, g integrerbara i $E \Rightarrow f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ för n.v. $x \in E \Rightarrow f + g$ definierat n.ö. i E .

Bevis. (i): Beteckna $h = f + g$. Då är h mätbar och definierad n.ö.

$$|h| \leq |f| + |g| \Rightarrow \int_E |h| \leq \int_E |f| + \int_E |g| < \infty \Rightarrow h \text{ integrerbar}$$

Oftast är $h^+ \neq f^+ + g^+$, men n.ö. i E gäller:

$$h^+ - h^- = h = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$\Rightarrow h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+ \quad (\text{funktionerna } \geq 0, \text{ integr. bägge sidorna (S. 4.28)})$$

$$\Rightarrow \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E h^- + \int_E f^+ + \int_E g^+ \quad (\text{integralerna } < \infty)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_E h &= \int_E h^+ - \int_E h^- = \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^- \\ &= \int_E f + \int_E g. \end{aligned}$$

(ii): (a) $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned} (\lambda f)^+ &= \lambda f^+ \quad \text{ja} \quad (\lambda f)^- = \lambda f^- \\ \Rightarrow \int_E (\lambda f)^+ &= \lambda \int_E f^+ \quad \text{ja} \quad \int_E (\lambda f)^- = \lambda \int_E f^- \\ &\Rightarrow \text{påståendet} \end{aligned}$$

(b) $\lambda < 0$

$$(\lambda f)^+ = (-\lambda) f^- \quad \text{ja} \quad (\lambda f)^- = (-\lambda) f^+, \quad \text{varav påst. följer som tidigare}$$

(iii): (i) och (ii) $\Rightarrow g - f$ integrerbar och

$$\int_E g = \int_E f + \int_E \underbrace{(g - f)}_{\geq 0} \geq \int_E f$$

(iv): $m(E) = 0 \Rightarrow \int_E f^+ = 0$ och $\int_E f^- = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$

(v): $f = g$ n.ö. i $E \Rightarrow f^+ = g^+, f^- = g^-$ n.ö. i E

$$\Rightarrow \int_E f^+ = \int_E g^+ \quad \text{ja} \quad \int_E f^- = \int_E g^- \Rightarrow \text{påståendet} \quad \square$$

Konvergenssatserna

Sats 4.45. (Dominerande konvergenssatsen, DKS) Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara mätbar och $f_j: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, vara mätbara funktioner s.a.

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) \quad \text{för n.v. } x \in E.$$

Om $\exists g: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ s.a. g är integrerbar i E och

$$|f_j(x)| \leq g(x), \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \text{och för n.v. } x \in E,$$

så är f integrerbar i E och

$$\int_E f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j. \quad (\text{Obs. } \int_E f \in \mathbb{R})$$

Bevis. Genom att definiera f_j , f och g pånytt i en mängd med måttet 0, kan vi anta att

$$\begin{aligned} f_j(x) &\xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(x) \quad \forall x \in E \quad \text{och} \\ |f_j(x)| &\leq g(x) \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq |g(x)| \quad \forall x \in E.$$

g integrerbar i E , Majorantprincipen (S. 4.38) $\Rightarrow f$ integrerbar i E .

$$\begin{aligned} g + f_j &\geq 0 \quad \text{och} \quad g + f_j \rightarrow g + f \xrightarrow{\text{Fatou}} \\ \int_E g + \int_E f &= \int_E (g + f) \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_E (g + f_j) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \left(\int_E g + \int_E f_j \right) \\ &= \int_E g + \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_E f \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j \quad (\text{obs. } \int_E g < \infty)$$

$$\begin{aligned} g - f_j &\geq 0, \quad \text{varav} \\ \int_E g - \int_E f &= \int_E (g - f) \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_E (g - f_j) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \left(\int_E g - \int_E f_j \right) \\ &= \int_E g - \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_E f \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j.$$

Alltså är

$$\int_E f \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j \leq \int_E f \quad \Rightarrow \quad \text{påståendet} \quad \square$$

Exempel 4.46. (Gammal provuppgift) Beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^{-3/2} \sin \frac{x}{n} dx.$$

Låt $f_n(x) = nx^{-3/2} \sin \frac{x}{n} = \underbrace{\left((n/x) \sin(x/n) \right)}_{\rightarrow 1, \text{ då } n \rightarrow \infty} x^{-1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^{-1/2} \stackrel{\text{bet.}}{=} f(x)$, varav

$$\int_0^1 f \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 2\sqrt{x} = 2.$$

$$\begin{aligned} |\sin t| \leq t \quad \forall t \geq 0 &\Rightarrow |(n/x) \sin(x/n)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (0, 1] \\ \Rightarrow |f_n(x)| \leq x^{-1/2} = g(x) \quad (= f(x)), & \quad g \text{ integrerbar över intervallet } [0, 1] \end{aligned}$$

$$\text{DKS} \Rightarrow \int_0^1 f_n \rightarrow \int_0^1 f = 2.$$

[(*): Egentligen fås detta inte direkt som en Riemann-integral, ty f är obegränsad i intervallet $[0, 1]$. Vi kan använda MKS som i Ex. på s.57]

Specialfall av DKS:

Sats 4.47. (Begränsade konvergenssatsen, BKS) Låt $m(E) < \infty$, $f_j: E \rightarrow \mathbb{R}$ en följd integrerbara funktioner, $f_j \rightarrow f$ n.ö. Om $\exists M < \infty$ s.s. $|f_j(x)| \leq M \quad \forall x \in E, j \in \mathbb{N}$, så är

$$\int_E f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j.$$

Bevis. Välj $g(x) = M$.

$$\begin{aligned} m(E) < \infty &\Rightarrow \int_E g = Mm(E) < \infty \Rightarrow g \text{ integrerbar} \\ &\stackrel{\text{DKL}}{\implies} \text{ påstående } \quad \square \end{aligned}$$

Tilläggsinformation: För kontinuerliga och likformigt begränsade funktioner får vi följande tilläggsinformation för Riemann-integralen:

Korollarium 4.48. Låt $f_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, vara en följd kontinuerliga funktioner s.a.

- $|f_j(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b], j \in \mathbb{N}$,
- \exists gränsvärde $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) \quad \forall x \in [a, b]$,
- gränsfunktionen f är kontinuerlig i $[a, b]$.

Då är (Riemann-integralen)

$$(\text{R}) \int_a^b f(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} (\text{R}) \int_a^b f_j(x) dx.$$

Bevis. f, f_j kontinuerliga i $[a, b]$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{s. 4.40}}{\implies} (\text{R}) \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f \quad \text{ja} \quad (\text{R}) \int_a^b f_j(x) dx = \int_a^b f_j \\ &\stackrel{\text{BKS}}{\implies} \int_a^b f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b f_j. \quad \square \end{aligned}$$

Obs. I Diff I har vi bevisat 4.48 med tilläggsantagandet $f_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f$ likformigt i $[a, b]$, d.v.s.

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f_j(x) - f(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

I beviset ovan används mätteori (Lebesguemått, MKS, Fatou, DKS, ...). Att bevisa 4.48 utan mätteori är svårt: se S. Simons: An eigenvector proof of Fatou's lemma for continuous functions. *Mathematical Intelligencer* 17 (1995), 67–70.

Sammandrag av konvergenssatserna:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j = \int_E \lim_{j \rightarrow \infty} f_j, \quad \text{om}$$

MKS: $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$;

DKS: $|f_j| \leq g$, g integrerbar;

BKS: $|f_j| \leq M$, $m(E) < \infty$;

Dessutom **Fatou:** $f_j \geq 0 \Rightarrow$

$$\int_E \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j.$$

Integrerbarhet över en disjunkt union.

Sats 4.49. Låt E_j , $j \in \mathbb{N}$, vara mätbara och disjunkta och $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Om f är integrerbar i E , så är f integrerbar i $E_j \forall j$ och

$$(4.50) \quad \int_E f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{E_j} f.$$

å andra sidan: om f är integrerbar i $E_j \forall j$ och

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{E_j} |f| < \infty,$$

så är f integrerbar i E och (4.50) gäller.

Bevis. S. 4.32 (ii) \Rightarrow

$$\int_E f^+ = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{E_j} f^+, \quad \text{likaså } f^-.$$

f integrerbar i $E \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \int_E f^+ < \infty \Rightarrow \int_{E_j} f^+ < \infty \forall j \\ \int_E f^- < \infty \Rightarrow \int_{E_j} f^- < \infty \forall j \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ integrerbar i } E_j \forall j.$$

Dessutom:

$$\begin{aligned} \int_E f &= \int_E f^+ - \int_E f^- = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{E_j} f^+ - \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{E_j} f^- \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\int_{E_j} f^+ - \int_{E_j} f^- \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{E_j} f. \end{aligned}$$

[(*): konvergerande serier]

å andra sidan:

$$\left. \begin{array}{l} f|_{E_j} \text{ mätbar } \forall j \Rightarrow f \text{ mätbar i } E \\ \int_E |f| \stackrel{4.32}{=} \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{E_j} |f| \stackrel{\text{ant.}}{<} \infty \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ integrerbar i } E \text{ och (4.50) gäller. } \square$$

Tilläggsinformation: Låt (X, Γ, μ) vara ett måttrum. Vi säger att Γ -mätbara funktionen $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ är integrerbar över mängden $E \in \Gamma$, om

$$\int_E |f| < \infty \quad (\Leftrightarrow \int_E f^+ < \infty \text{ och } \int_E f^- < \infty).$$

Integralens värde är

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \quad (\in \mathbb{R}).$$

Resultaten i kapitel 4.34 (bl.a. MKS, DKS, o.s.v.) är i kraft (förutom sambanden till Riemann-integralen). I bevisen ersätter vi \mathbb{R}^n med mängden X , Lebesguemåttet m med måttet μ , o.s.v.

5 Fubinis satser

Bakgrund: Låt $A = [a, b] \times [c, d]$ vara ett slutet 2-intervall och $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Då kan f 's Riemann-integral över A beräknas som på varandra följande integraler:

$$(R) \int \int_A f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Det visar sig att Lebesgueintegralen har en liknande egenskap med mycket allmänna villkor. Resultaten i fråga (s.k. Fubinis satser) hör till Lebesgueintegralens nyttigaste egenskaper!

I beviset använder vi följande lemma.

Definition 5.1. n -intervallet $I \subset \mathbb{R}^n$ är halvöppet till höger, om det är av formen $[a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$.

Lemma 5.2. Varje öppen $G \subset \mathbb{R}^n$ är en uppräknelig union av disjunkta, till höger halvöppna n -intervall.

Bevis. Antag $k \in \mathbb{N}$. Dela in \mathbb{R}^n i $(n-1)$ -dim. plan $x_i = m/2^k$, $m \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ i till höger halvöppna, disjunkta kuber, vars sidor har längden $= 1/2^k$. Låt mängden av dessa $= \tilde{N}_k$. (Obs.: $I \in \tilde{N}_k \Rightarrow$ diametern till $I = \sqrt{n}/2^k$.) Beteckna

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1 &= \{I \in \tilde{N}_1 : I \subset G\}; \\ \tilde{Q}_2 &= \{I \in \tilde{N}_2 : I \subset G, I \cap J = \emptyset \forall J \in \tilde{Q}_1\}; \\ \text{allmänt } \tilde{Q}_k &= \{I \in \tilde{N}_k : I \subset G, I \cap J = \emptyset \forall J \in \tilde{Q}_1 \cup \dots \cup \tilde{Q}_{k-1}\}. \end{aligned}$$

Då är $\tilde{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{Q}_k$ en uppräknelig familj av disjunkta, till höger halvöppna kuber (välj ett tal $a \in I \cap \mathbb{Q}^n$ ur varje $I \in \tilde{Q}_k \Rightarrow \forall \tilde{Q}_k$ uppräknelig $\stackrel{\text{S. 1.16}}{\implies} \tilde{Q}$ uppräknelig). Vi visar, att $G = \bigcup_{I \in \tilde{Q}} I$. Det är klart, att

$$\bigcup_{I \in \tilde{Q}} I \subset G.$$

å andra sidan: Antag $x \in G$. G öppen $\Rightarrow \exists B(x, r) \subset G$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ s.a. } \exists I \in \tilde{N}_k, x \in I \subset B(x, r) \quad (\text{välj } k \text{ s.a. } \sqrt{n}/2^k < r).$$

Om $I \in \tilde{Q}_k$, så är

$$x \in I \subset \bigcup_{I \in \tilde{Q}} I.$$

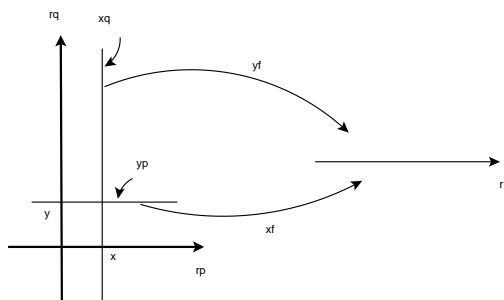
Om $I \notin \tilde{Q}_k$, så $\exists J \in \tilde{Q}_1 \cup \dots \cup \tilde{Q}_{k-1}$ s.a. $I \cap J \neq \emptyset$. Konstruktionen $\Rightarrow I \subset J$ (ty $I \subset J$ eller $I \cap J = \emptyset$), varav

$$x \in I \subset J \subset \bigcup_{I \in \tilde{Q}} I.$$

□

Vi identifierar $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $p, q \in \mathbb{N}$.

$$z \in \mathbb{R}^{p+q} \iff z = (\underbrace{x_1, \dots, x_p}_{=x \in \mathbb{R}^p}, \underbrace{y_1, \dots, y_q}_{=y \in \mathbb{R}^q}) = (x, y).$$



Sats 5.3. (Fubinis 1. sats, $f \geq 0$) Låt $f: \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ vara mätbar och $f \geq 0$. Då gäller att

(1)

$$y \mapsto f(x, y) \text{ mätbar för n.v. } x \in \mathbb{R}^p; \\ [\text{alltså } m_p(\{x \in \mathbb{R}^p: y \mapsto f(x, y) \text{ icke-mätbar}\}) = 0]$$

(2)

$$x \mapsto f(x, y) \text{ mätbar för n.v. } y \in \mathbb{R}^q;$$

(3)

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y) \text{ mätbar};$$

(4)

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dm_p(x) \text{ mätbar};$$

(5)

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \stackrel{(5a)}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y) \right) dm_p(x) \\ \stackrel{(5b)}{=} \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dm_p(x) \right) dm_q(y). \quad (+\infty \text{ tillåtet})$$

Bevis. Symmetri \Rightarrow räcker att visa (1), (3) och (5a). Beteckna

$$P = \{f: \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \geq 0 \text{ mätbar och uppfyller villkoren (1),(3) och (5a)}\}.$$

Vi vill visa: $f: \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$, mätbar $\Rightarrow f \in P$.

Steg 1. Vi börjar med att visa följande allmänna egenskaper:

- (a) $f, g \in P, a, b \geq 0 \Rightarrow af + bg \in P$;
- (b) $f, g \in P, g(z) < \infty \forall z, f - g \geq 0, \int_{\mathbb{R}^{p+q}} g < \infty \Rightarrow f - g \in P$;
- (c) $f_j \in P, f_j \nearrow f \Rightarrow f \in P$;
- (d) $f_j \in P \Rightarrow \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j \in P$;
- (e) $f_j \in P, f_j \searrow f, \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_1 < \infty \Rightarrow f \in P$.

Bevis för (a)–(e):

(a): Klart, ty $af + bg$ är mätbar och $\int(af + bg) = a \int f + b \int g$. Detaljerat:

$$\left. \begin{array}{l} y \mapsto f(x, y) \text{ mätbar, då } x \notin E_1, m_p(E_1) = 0 \\ y \mapsto g(x, y) \text{ mätbar, då } x \notin E_2, m_p(E_2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$y \mapsto af(x, y) + bg(x, y)$ mätbar (åtminstone) då $x \notin E_1 \cup E_2, m_p(E_1 \cup E_2) = 0$ (d.v.s. (1) gäller);

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} (af(x, y) + bg(x, y)) dm_q(y) \\ \stackrel{4.28}{=} a \underbrace{\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y)}_{x \mapsto \text{--- mätbar } (f \in P)} + b \underbrace{\int_{\mathbb{R}^q} g(x, y) dm_q(y)}_{x \mapsto \text{--- mätbar } (g \in P)} \quad \text{mätbar (d.v.s. (3) gäller);}$$

Dessutom:

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} (af + bg) \stackrel{4.28}{=} a \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f + b \int_{\mathbb{R}^{p+q}} g \\ \stackrel{(f, g \in P)}{=} a \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y) \right) dm_p(x) + b \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} g(x, y) dm_q(y) \right) dm_p(x) \\ \stackrel{4.28}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} (af + bg) dm_q(y) \right) dm_p(x) \quad (\text{d.v.s. (5a) gäller}).$$

(b): På liknande sätt, ty $f - g$ är mätbar och $\int(f - g) = \int f - \int g$.

(c):

(1) $\exists E_j \subset \mathbb{R}^p$, $m_p(E_j) = 0$ s.a. $y \mapsto f_j(x, y)$ mätbar $\forall x \notin E_j \xrightarrow{3.23} y \mapsto f(x, y)$ mätbar
 $\forall x \notin \cup_j E_j$, $m_p(\cup_j E_j) = 0$.

(3)

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y) \stackrel{\text{MKS}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^q} f_j(x, y) dm_q(y)}_{x \mapsto \text{--- mätbar } (f_j \in P)} \text{ mätbar (S. 3.23)}.$$

(5a)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \stackrel{\text{MKS}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_j \stackrel{f_j \in P}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_j(x, y) dm_q(y) \right) dm_p(x) \\ \stackrel{2 \times \text{MKS}}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y) \right) dm_p(x). \end{aligned}$$

(d): (a) \Rightarrow delsummorna $\sum_{j=1}^k f_j \in P$. Dessutom $\sum_{j=1}^k f_j \nearrow \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j$, varav (c) \Rightarrow påstående.
 (e): Som (c) med hjälp av avtagande MKS.

Vi har nu bevisat (a)–(e).

Steg 2. Antag $f: \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, mätbar. Visa: $f \in P$. Beviset i flera skeden ((**A**)–(**H**)) för olika funktioner f .

(**A**): $f = \chi_{I \times J}$, där $I \subset \mathbb{R}^p$ är ett p -intervall och $J \subset \mathbb{R}^q$ ett q -intervall. (Obs. $I \times J$ är ett $(p+q)$ -intervall.) Då är $f(x, y) = \chi_I(x)\chi_J(y)$.

(1): Klart, ty

$$y \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \chi_J(y), & \text{om } x \in I; \\ 0, & \text{om } x \notin I. \end{cases}$$

(3): $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} \chi_{I \times J}(x, y) dm(y) = m(J)\chi_I(x)$ är mätbar (enkel).

(5a):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \stackrel{\text{enkel}}{=} m_p(I)m_q(J), \quad \text{och} \\ \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} \chi_{I \times J}(x, y) dm_q(y) \right) dm_p(x) \stackrel{\text{tidigare}}{=} \int_{\mathbb{R}^p} m_q(J)\chi_I(x) dm_p(x) = m_q(J)m_p(I). \end{aligned}$$

(**B**): $f = \chi_G$, där $G \subset \mathbb{R}^{p+q}$ är öppen. Lemma 5.2 \Rightarrow

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

uppräknelig union av disjunkta intervall $E_j = I_j \times J_j \subset \mathbb{R}^{p+q}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{disjunkt union } \Rightarrow f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \chi_{E_j} \\ \text{(A)} \Rightarrow \chi_{E_j} \in P \forall j \end{array} \right\} \stackrel{(d)}{\Rightarrow} f \in P.$$

(C): $f = \chi_B$, där $B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ är en begränsad \mathcal{G}_δ -mängd:

$$B = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j, \text{ där } G_j \subset \mathbb{R}^{p+q} \text{ öppen } \forall j.$$

Vi kan välja en begränsad mängd G_j (annars betraktar vi mängderna $G_j \cap B(0, R)$, där $B(0, R) \supset B$) och

$$G_1 \supset G_2 \supset \dots$$

genom att vid behov ersätta G_j med mängden $G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_j$. Nu gäller att

$$\left. \begin{array}{l} f_j = \chi_{G_j} \searrow \chi_B = f \text{ avtagande följd} \\ \text{(B)} \Rightarrow f_j \in P \forall j \\ \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_1 = m(G_1) < \infty \end{array} \right\} \xrightarrow{(e)} f \in P.$$

(D): $f = \chi_E$, där $E \subset \mathbb{R}^{p+q}$ är en begränsad mängd och $m(E) = 0$. Övningsuppgift $\Rightarrow \exists$ begränsad \mathcal{G}_δ -mängd $B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ s.a. $E \subset B$ och $m(B) = 0$. Beteckna $g = \chi_B$.

$$\begin{aligned} \text{(C)} &\Rightarrow g \in P. \\ E \subset B &\Rightarrow 0 \leq f \leq g. \end{aligned}$$

Nu gäller att

$$\begin{aligned} 0 = m(B) &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} g \stackrel{g \in P}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} g(x, y) dm_q(y) \right) dm_p(x) \\ \stackrel{4.33 \text{ (ii)}}{\implies} \int_{\mathbb{R}^q} g(x, y) dm_q(y) &= 0 \text{ för n.v. } x \in \mathbb{R}^p \\ \stackrel{4.33 \text{ (ii)}}{\implies} \text{ för n.v. } x \in \mathbb{R}^p \text{ gäller: } g(x, y) &= 0 \text{ för n.v. } y \in \mathbb{R}^q \\ \stackrel{0 \leq f \leq g}{\implies} \text{ för n.v. } x \in \mathbb{R}^p \text{ gäller: } f(x, y) &= 0 \text{ för n.v. } y \in \mathbb{R}^q \\ \Rightarrow \text{ för n.v. } x \in \mathbb{R}^p \text{ gäller: } y \mapsto f(x, y) &\text{ mätbar (d.v.s. (1) gäller) och } \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y) = 0 \\ \Rightarrow x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y) &\text{ mätbar (d.v.s. (3) gäller).} \end{aligned}$$

Dessutom är (5a) i kraft i formen $0=0$, varav $f = \chi_E \in P$.

(E): $f = \chi_A$, där $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ är en mätbar och begränsad mängd. Övningsuppgift $\Rightarrow \exists$ begränsad \mathcal{G}_δ -mängd $B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ s.a. $A \subset B$ och $m(B) = m(A)$. Då är $E = B \setminus A$ mätbar och

$$\left. \begin{array}{l} B = A \cup E \text{ disjunkt union} \\ m(B) = m(A) < \infty \end{array} \right\} \Rightarrow m(B) = m(A) + m(E) \Rightarrow m(E) = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(C)} \Rightarrow \chi_B \in P \\ \text{(D)} \Rightarrow \chi_E \in P \end{array} \right\} \stackrel{(b)}{\implies} f = \chi_B - \chi_E \in P.$$

(F): $f = \chi_A$, där $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ är en godtycklig mätbar mängd. Låt $A_j = A \cap B(0, j)$, där $B(0, j) \subset \mathbb{R}^{p+q}$ är ett (öppet) klot med radien j .

$$\left. \begin{array}{l} A_j \subset \mathbb{R}^{p+q} \text{ mätbar och begränsad} \xrightarrow{\text{(E)}} \chi_{A_j} \in P \\ A_j \text{ växande följd, } A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \Rightarrow \chi_{A_j} \nearrow \chi_A \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(c)}} f = \chi_A \in P.$$

(G): $f = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j} \in Y$ enkel funktion i \mathbb{R}^{p+q} . (F) $\Rightarrow \chi_{A_j} \in P \xrightarrow{\text{(a)}} f \in P$.

(H): $f: \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow [0, +\infty]$ godtycklig och mätbar. Approximeringssatsen 4.14 $\Rightarrow \exists$ växande följd enkla funktioner $f_j \in Y$ s.a. $f_j \nearrow f$. (G) $\Rightarrow f_j \in P \xrightarrow{\text{(c)}} f \in P$. \square

Sats 5.4. (Fubinis 2. sats, funktioner som byter tecken) Låt $f: \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ vara mätbar och antag att minst en av integralerna

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} |f|, \quad \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x, y)| dm_q(y) \right) dm_p(x), \quad \text{eller}$$

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x, y)| dm_p(x) \right) dm_q(y)$$

är ändlig. Då är

- (1) $y \mapsto f(x, y)$ integrerbar i \mathbb{R}^q för n.v. $x \in \mathbb{R}^p$;
- (2) $x \mapsto f(x, y)$ integrerbar i \mathbb{R}^p för n.v. $y \in \mathbb{R}^q$;
- (3) $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y)$ integrerbar i \mathbb{R}^p , d.v.s.

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left| \int_{\mathbb{R}^q} |f(x, y)| dm_q(y) \right| dm_p(x) < \infty;$$

- (4) $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dm_p(x)$ integrerbar i \mathbb{R}^q ;
- (5) f integrerbar i \mathbb{R}^{p+q} och

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dm_p(x) \right) dm_q(y). \quad (\in \mathbb{R})$$

Bevis. Antagandet (minst en integral $< \infty$) och Fubini 1. \Rightarrow alla ovannämnda integraler $< \infty$, d.v.s.

$$(5.5) \quad \int_{\mathbb{R}^{p+q}} |f| = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x, y)| dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x, y)| dm_p(x) \right) dm_q(y) < \infty.$$

$$\Rightarrow f \text{ integrerbar i } \mathbb{R}^{p+q} \xrightarrow{\text{def.}} f^+, f^- \text{ integrerbara i } \mathbb{R}^{p+q}$$

varav Fubini 1. \Rightarrow

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x, y) dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+ < \infty.$$

Sats 4.33 (ii) \Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x, y) dm_q(y) < \infty \text{ för n.v. } x \in \mathbb{R}^p \\ \text{likväl } \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x, y) dm_q(y) < \infty \text{ för n.v. } x \in \mathbb{R}^p \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$y \mapsto f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y)$ integrerbar för n.v. $x \in \mathbb{R}^p$. (d.v.s. (1) gäller)

Beteckna

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y) = \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x, y) dm_q(y) - \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x, y) dm_q(y).$$

Fubini 1. \Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x, y) dm_q(y) \text{ mätbar} \\ x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x, y) dm_q(y) \text{ mätbar} \end{array} \right\} \Rightarrow u \text{ mätbar (som funktion av } x).$$

Dessutom är

$$|u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^q} |f(x, y)| dm_q(y),$$

varav

$$\int_{\mathbb{R}^p} |u(x)| dm_p(x) \leq \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x, y)| dm_q(y) \right) dm_p(x) \stackrel{(5.5)}{<} \infty.$$

u är alltså integrerbar i \mathbb{R}^p (Majorantprincipen), d.v.s. (3) gäller. Dessutom:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+ - \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^- \\ &\stackrel{\text{Fub. 1.}}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x, y) dm_q(y) \right) dm_p(x) - \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x, y) dm_q(y) \right) dm_p(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} \underbrace{(f^+(x, y) - f^-(x, y))}_{=f(x,y) \text{ n.ö.}} dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y) \right) dm_p(x). \end{aligned}$$

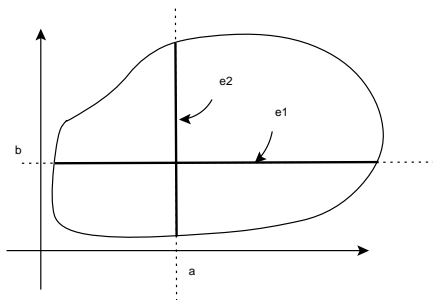
Symmetriskt (2), (4) och andra ekvationen i (5). □

Några tillämpningar (mer på kursen Realanalys I").

Exempel 5.6. Låt $E \subset \mathbb{R}^2$ vara en mätbar mängd med $m_2(E) = 0$. Påstående: Nästan varje vågrät (lodrät motsv.) linje skär E i en mängd vars 1-dimensionella Lebesguemått = 0.

Lösn. Beteckna

$$\begin{aligned} E_1(b) &= \{x \in \mathbb{R} : (x, b) \in E\}, \quad b \in \mathbb{R}; \quad (\text{snittet med } y = b \text{ och } E) \\ E_2(a) &= \{y \in \mathbb{R} : (a, y) \in E\}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (\text{snittet med } x = a \text{ och } E) \end{aligned}$$



Påståendet betyder att:

$$m_1(E_1(y)) = 0 \quad \text{för n.v. } y \in \mathbb{R}, \quad \text{och motsv. } m_1(E_2(x)) = 0 \quad \text{för n.v. } x \in \mathbb{R}.$$

Fubini 1. tillämpad på funktionen $f = \chi_E \Rightarrow$

$$0 = m_2(E) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_E \stackrel{\text{Fub. 1.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x, y)}_{\chi_{E_2(x)}(y)} dy \right) dx$$

$$\stackrel{4.33 \text{ (ii)}}{\implies} m_1(E_2(x)) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = 0 \quad \text{för n.v. } x \in \mathbb{R}.$$

På liknande sätt är $m_1(E_1(y)) = 0$ för n.v. $y \in \mathbb{R}$.

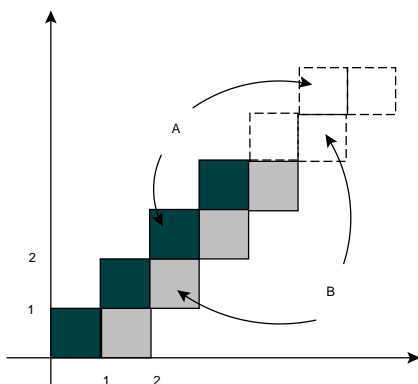
å andra sidan: Om $E \subset \mathbb{R}^2$ är en sådan mätbar delmängd att $m_1(E_2(x)) = 0$ för n.v. $x \in \mathbb{R}$ (eller $m_1(E_1(y)) = 0$ för n.v. $y \in \mathbb{R}$), så är $m_2(E) = 0$. Orsak: Fubini 1. och (den mätbara funktionen) $f = \chi_E$ (som tidigare).

Tilläggsinformation: I föregående exempel är antagandet $E \subset \mathbb{R}^2$ mätbar väsentligt: det $\exists E \subset \mathbb{R}^2$ s.a.

- E inte är Lebesguemätbar (varav $m^*(A) > 0$)
- varje vågrät linje skär E i högst en punkt
- varje lodrät linje skär E i högst en punkt.

(Sierpinski: Fundamenta Mathematica 1 (1920), s. 114.)

Exempel 5.7. Antag $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = \chi_A - \chi_B$, där $A =$ unionen av de övre kvadraterna och $B =$ unionen av de nedre kvadraterna (se bild).



Nu är

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = 0.$$

å andra sidan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy &= \chi_{[0,1]}(x) \quad (f(x, y) \equiv 1 \text{ i den undre "A-kvadraten" } [0, 1] \times [0, 1]) \\ &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy \neq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Fubinis sats är inte i kraft, ty f byter tecken (Fubini 1.) och

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f| = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A \cup B} = m_2(A \cup B) = \infty$$

d.v.s. f är inte integrerbar i \mathbb{R}^2 (Fubini 2.).

Exempel 5.8. Beräkna

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}.$$

Lösn. Oegentlig Riemann-integral i planet

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{R}) \int_{B(0,n)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{R}) \int_0^n \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\varphi \\ &= 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{R}) \int_0^n r e^{-r^2} = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n -e^{-r^2} = -\pi \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n^2} - 1) = \pi. \end{aligned}$$

å andra sidan MKS $\stackrel{(**)}{\implies}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = (\mathbb{R}) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Dessutom Fubini 1. \Rightarrow

$$\begin{aligned} \pi &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 \\ &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

(*): polära koordinater

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{jakobianen } J(r, \varphi) = r.$$

(**): MKS tillämpad på funktionerna $f_n(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \chi_{B(0,n)}(x, y)$.

SLUT

Under finns en lista på (några) böcker som kan användas som tilläggsmaterial.

Referenser

- [EG] Evans, Lawrence och Gariépy, Ronald. *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 1992.
- [Fr] Friedman, Avner. *Foundations of modern analysis*, Dover Publications Inc., 1982.
- [GZ] Gariépy, Ronald och Ziemer, William. *Modern real analysis*, PWS Publishing Company, 1994.
- [HS] Hewitt, Edwin och Stromberg, Karl. *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, 1975.
- [Jo] Jones, Frank. *Lebesgue integration on Euclidean space*, Jones and Bartlett Publishers, 1993.
- [Mat] Mattila, Pertti. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge University Press, 1995.
- [MW] McDonald, John N. och Weiss, Neil A. *A course in real analysis*, Academic Press Inc., 1999.
- [Ro] Royden, H. L. *Real analysis*, Macmillan Publishing Company, 1988.
- [Ru] Rudin, Walter. *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., 1987.