Insitutionen för matematik och statistik
Mått- och integrationsteori
Övning 7
Modellsvar,
Henrik Wirzenius
26.11.2012

Uppgift 1. *Bestäm gränsvärdet*

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \Big(\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\Big)^n dx.$$

Lösning: För varje $x > 1$ så gäller

$$|(\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x})^n| = |\frac{1}{x^n}\cos^n\frac{1}{x}| \leq \frac{1}{x^n} \to_{n\to\infty} 0.$$

I tillägg så är

$$|(\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x})^n \leq \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{x^2},$$

då $n \geq 2$ och $x > 1$. Eftersom $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} = 1 < \infty$ så har vi på basis av satsen för dominerad konvergens att

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \Big(\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\Big)^n dx = \int_1^\infty 0 = 0.$$

Uppgift 2. *Låt $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (dvs. f mätbar och $\int_{\mathbb{R}^n} |f| dm_n < \infty$). Visa att det mot varje $\varepsilon > 0$ svarar en Lebesguemätbar mängd $A \subset \mathbb{R}^n$ med $m_n(A) < \infty$ och*

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus A} |f| < \varepsilon.$$

Lösning: Eftersom $0 \leq |f|\chi_{B(0,1)} \leq |f|\chi_{B(0,2)} \leq \cdots$ så har vi på basis av satsen för monoton konvergens att

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f|\chi_{B(0,n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n\to\infty} |f|\chi_{B(0,n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

Således existerar det för varje $\varepsilon > 0$ ett tal $M > 0$ för vilket $\int_{\mathbb{R}^n} |f| - \int_{\mathbb{R}^n} |f|\chi_{B(0,M)} < \varepsilon$. Då gäller $m_n(B(0,M)) < \infty$ och

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,M)} |f| = \int_{\mathbb{R}^n} |f| - \int_{B(0,M)} |f| < \varepsilon.$$

Uppgift 3. *Låt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum med $\mu(X) = 1$. Definiera för alla mätbara funktioner $f, g : X \to \mathbb{C}$*

$$d(f,g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu.$$

(a) Visa att d är en metrik.

(b) Visa att $d(f_n, f) \to 0$ om och endast om f_n konvergerar mot f med avseende på måttet μ (konvergens med avseende på ett mått definierades i övning 5).

Lösning: (a) Låt $f, g, h : X \to \mathbb{C}$ vara mätbara funktioner och betäckna $A = \{x \in X : |f-h| \leq |f-g|\}$ och $B = \{x \in X : |f-h| \leq |g-h|\}$. Då är

$$X = A \bigcup (B \setminus A) \bigcup X \setminus (A \cup B)$$

där högra sidan består av unionen av parvis disjunkta mängder. Således har vi $\int_X = \int_A + \int_{B\setminus A} + \int_{X\setminus(A\cup B)}$. Vi noterar också att $0 \leq a \leq b$ implicerar $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$. Således är

$$\int_A \frac{|f-h|}{1+|f-h|} d\mu \leq \int_A \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu, \quad \int_{B\setminus A} \frac{|f-h|}{1+|f-h|} d\mu \leq \int_{B\setminus A} \frac{|g-h|}{1+|g-h|} d\mu$$

och

$$\begin{aligned}\int_{X\setminus(A\cup B)} \frac{|f-h|}{1+|f-h|} d\mu &\leq \int_{X\setminus(A\cup B)} \frac{|f-g|+|g-h|}{1+|f-h|} d\mu = \int_{X\setminus(A\cup B)} \frac{|f-g|}{1+|f-h|} d\mu + \int_{X\setminus(A\cup B)} \frac{|g-h|}{1+|f-h|} d\mu \\ &\leq \int_{X\setminus(A\cup B)} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu + \int_{X\setminus(A\cup B)} \frac{|g-h|}{1+|g-h|} d\mu\end{aligned}$$

Därmed gäller

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \int_A \frac{|f-h|}{1+|f-h|} d\mu + \int_B \frac{|f-h|}{1+|f-h|} d\mu + \int_{X\setminus(A\cup B)} \frac{|f-h|}{1+|f-h|} d\mu \\ &\leq \int_A \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu + \int_B \frac{|g-h|}{1+|g-h|} d\mu + \int_{X\setminus(A\cup B)} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu + \int_{X\setminus(A\cup B)} \frac{|g-h|}{1+|g-h|} d\mu \\ &= \int_{A\cup(X\setminus(A\cup B)} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu + \int_{B\cup(X\setminus(A\cup B)} \frac{|g-h|}{1+|g-h|} d\mu \\ &\leq \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu + \int_X \frac{|g-h|}{1+|g-h|} d\mu \\ &= d(f,g) + d(g,h). \end{aligned}$$

Likheten $d(f,g) = d(g,f)$, $d(f,g) \geq 0$ och $d(f,f) = 0$ gäller uppenbarligen. Således är d en pseudometrik.

(b) Låt $\varepsilon > 0$ och antag att $d(f_n, f) \to 0$. Betäckna $A_n = \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\})$. Nu gäller

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mu(A_n) = \int_{A_n} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq \int_{A_n} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n-f|} \leq \int_X \frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|} = d(f_n, f).$$

Eftersom $d(f_n, f) \to 0$ så har vi $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mu(A_n) \to 0$ och således också $\mu(A_n) \to 0$. Därmed konvergerar f_n mot f med avseende på μ.

Antag härnäst att $f_n \to f$ med avseende på måttet μ. Antag ytterligare att $d(f_n, f) \not\to 0$. Då existerar det ett tal $\varepsilon > 0$ och en delföljd $(f_{n_k})_k$ för vilken

$$d(f_{nk}) = \int_X \frac{|f_{n_k} - f|}{1 + |f_{nk} - f|} \geq \varepsilon$$

för varje $k \in \mathbb{N}$. Men eftersom $f_{n_k} \to f$ med avseende på måttet μ så konvergerar en delföljd $(f_{n_{kr}})_r$ mot f nästan överallt. Således gäller $\lim_r |f_{n_{kr}} - f| = 0$ för nästan varje x och eftersom $\frac{|f_{nkr} - f|}{1+|f_{nkr}-f|} \leq |f_{nkr} - f|$ så gäller också $\lim_r \frac{|f_{nkr}-f|}{1+|f_{nkr}-f|} = 0$. Eftersom $\frac{|f_{nkr}-f|}{1+|f_{nkr}-f|} \leq 1$ så har vi på basis av satsen för dominerad konvergens att $\lim_r \int_X \frac{|f_{n_{kr}}-f|}{1+|f_{nkr}-f|} = \int_X 0 = 0$. Detta ger en motsägelse och således gäller $d(f_n, f) = 0$.

Uppgift 4. *Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara integrerbar med avseende på Lebesguemåttet och definiera funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom*

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Visa att g är kontinuerlig.

Lösning: Låt $x \in \mathbb{R}$ och $(x_n)_n$ en följd för vilken $x_n \to x$. Eftersom sin är kontinuerlig, så gäller $\lim_{n\to\infty} f(t)\sin(x_n t) = f(t)\sin(xt)$ för varje $t \in \mathbb{R}$. I tillägg så har vi $|f(t)\sin(x_n t)| \leq |f(t)|$ för varje n och t. Eftersom f är integrerbar, så är också $|f|$ integrerbar och således har vi på basis av satsen för dominerad konvergens att

$$\lim_{n\to} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(x_n t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt,$$

d.v.s. $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$ vilket visar att g är kontinuerlig.

Uppgift 5. *Bestäm gränsvärdet*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{-nx^2} dx.$$

Lösning: För varje $n \in \mathbb{N}$, låt $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx^2}$. Då gäller $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ för varje $x \neq 0$. Vi noterar också att $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0$ och $\int_{\mathbb{R}} f_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} < \infty$. Således på basis av satsen för dominerad konvergens så gäller

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{-nx^2} dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \chi_{[-n,n]} = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \chi_{[-n,n]} = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0.$$

Uppgift 6. *Bestäm gränsvärdet*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^{n-1}} dx.$$

Lösning: Vi räknar först ut gränsvärdena:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin(x^n)}{x^{n-1}}dx \text{ och } \lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{\sin(x^n)}{x^{n-1}}dx.$$

Eftersom $\sin x \le x$ för $x \ge 0$ så gäller $\sin x^n \le x^n \le x^{n-1}$ då $x \in [0,1]$. Alltså är $\dfrac{\sin x^n}{x^{n-1}} \le 1$. I tillägg så har vi för varje $0 < x < 1$ att

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x^n}{x^{n-1}} = x \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x^n}{x^n} = x,$$

eftersom $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x^n}{x^n} = \lim_{a\to 0^+}\frac{\sin a}{a} = \lim_{a\to 0^+}\frac{\cos a}{1} = 1$ där andra likheten följer ur l'Hospitals regel. Således har vi på basis av satsen för dominerad konvergens att

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\frac{\sin(x^n)}{x^{n-1}}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{(0,1)}\frac{\sin(x^n)}{x^{n-1}}dx = \int_{(0,1)} xdx = \frac{1}{2}.$$

För $x > 1$ gäller $|\frac{\sin(x^n)}{x^{n-1}}| \le |\frac{1}{x^{n-1}}| \to 0$. Vi ser också att $|\frac{\sin(x^n)}{x^{n-1}}| \le \frac{1}{x^2}$ för $x > 1$ och $n > 2$. Eftersom $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx < \infty$ så har vi igen på basis av satsen för dominerad konvergens att

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{\sin(x^n)}{x^{n-1}} = \int_1^\infty 0dx = 0.$$

Således är

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 0 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin(x^n)}{x^{n-1}} + \lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{\sin(x^n)}{x^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin(x^n)}{x^{n-1}}.$$

Uppgift 7. *Låt* $[0,1] \to \mathbb{R}$ *vara mätbar och definiera funktionerna* $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *genom*

$$g_n(x) = \frac{\cos(f(x))}{1 + n(f(x))^2}, \quad x \in [0,1].$$

Visa att funktionerna g_n *är integrerbara över intervallet* $[0,1]$ *och att gränsvärdet*

$$a_f = \lim_{n\to}\int_0^1 g_n(x)dx$$

existerar. Vilka värden antar a_f *då* f *genomlöper alla mätbara funktioner* f : $[0,1] \to \mathbb{R}$.

Lösning: Vi ser att

$$|g_n(x)| = |\frac{\cos(f(x))}{1 + n(f(x))^2}| \le |\frac{1}{1 + n(f(x))^2}| \le 1$$

för varje $x \in [0,1]$ och $n \in \mathbb{N}$. Således, på basis av majorant principen, är varje g_n integrerbar. I tillägg gäller för varje $x \in f^{-1}(0)$ att

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\cos(0)}{1 + n(0)^2} = 1$$

och för varje $x \notin f^{-1}(0)$ gäller

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(f(x))}{1+n(f(x))^2} = 0.$$

Således är $\lim_{n\to\infty} g_n = \chi_{f^{-1}(0)}$. På basis av den begränsade konvergenssatsen gäller därmed

$$a_f = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n = \int_0^1 \chi_{f^{-1}(0)} = m(f^{-1}(0)).$$

Således existerar gränsvärdet a_f och eftersom $f^{-1}(0) \subset [0,1]$ så har vi $a_f \in [0,1]$. Låt nu $b \in [0,1]$ vara godtyckligt. Då är $f = \chi_{[b,1]}$ mätbar (om $b = 1$ så är $f = \chi_1$) och

$$a_f = m(f^{-1}(0)) = m(\chi_{[b,1]}^{-1}(0)) = m([0,b]) = b.$$

Således antar a_f alla värden i intervallet $[0,1]$ då f genomlöper alla mätbara funktioner $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.