Insitutionen för matemtatik och statistik
Mått- och integrationsteori
Övning 5
Förslag till Lösningar

Jeremias Berg
Henrik Wirzenius

5 mars 2015

Uppgift. 1
Definiera för $x \in \mathbb{R}$ och $t > 0$

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad \text{och} \quad g(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,x).$$

(a) Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x) dx = 1$$

för alla $t > 0$.

b) Låt $s > 0$. Evaluera de dubbla integralerna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{s}^{\infty} g(t,x)\, dt\, dx \quad \text{och} \quad \int_{s}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t,x)\, dx\, dt.$$

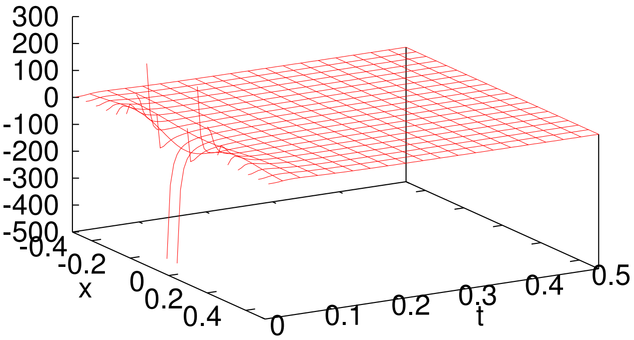
c) Gäller Fubinis sats i detta fall?

d) Om inte, varför?

Lösning:
I integral beräckningarna andvänds ofta (och utan att skillt nämnas) faktumet att, då det båda existerar, är Riemann integralen lika med Lebesgue integralen. Vidare andvänder vi även faktumet att samma gäller för oegentliga Riemann integralen om funktionen är positiv.

a) Sista exemplet i kompendiet visar att: $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Med hjälp av detta kan vi lösa uppgiften. Låt $y = \frac{x}{\sqrt{2t}}$. Då är: $dx = \sqrt{2t} dy$ och:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \sqrt{2t} dy = \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{2\pi t}} \sqrt{\pi} = 1.$$



Figur 1: Funktionen $g(t, x)$ i uppgift 1

b) Vi börjar med att evaluera: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{s}^{\infty} g(t,x)\,dt\,dx$ (som är lite lättare av de två). Baserat på g:s definition, uppgiftens a del samt faktumet att $\lim_{n\to\infty} f(n,x) = 0$ får vi att:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{s}^{\infty} g(t,x)\,dt\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty}\left(f(n,x) - f(s,x)\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} -f(s,x)dx = -1.$$

Å andra sidan, kan vi genom derivering räkna ut ett utryck för $g(t,x)$ som inte beror på f:

$$g(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} t^{-3/2}\left(\frac{x^2}{t}e^{-\frac{x^2}{2t}} - e^{-\frac{x^2}{2t}}\right).$$

Nu när vi igen substituerar $y = \frac{x}{\sqrt{2t}}$ ($dx = \sqrt{2t}dy$) och andvänder a) delen får vi att:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(t,x)dx &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}t^{-3/2}\Big(\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2t}}\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}}\,dx\Big)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}t^{-3/2}\Big(\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} 2ty^2e^{-y^2}\sqrt{2t}dy - \sqrt{2t\pi}\Big)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}t^{-3/2}\Big(\frac{1}{t}(2t)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \sqrt{2t\pi}\Big)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}t^{-3/2}\Big(\sqrt{2t\pi} - \sqrt{2t\pi}\Big)\\ &= 0.\end{aligned}$$

I tredje likheten använde vi faktat att $\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2}dx = \sqrt{\pi}/2$. Detta kan ses genom att skriva

$$y^2e^{-y^2} = \frac{y}{2}2ye^{-y^2} = -\frac{y}{2}\times\frac{d}{dx}e^{-y^2}$$

och använda sig av partiell integrering.

Därmed är
$$\int_s^\infty \int_{-\infty}^\infty g(t,x)\,dx\,dt. = \int_s^\infty 0, dt. = 0.$$

c) Fubinis sats gäller inte för funktionen $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ då de två integralerna får olika värden.

d) En informel motivering för varför Fubinis andra sats 2 (notera att g kan byta tecken) kan ses från Bild 1. Notera hur funktionen beter runt origo. För små x är $\lim_{t\to 0} g(t,x) = -\infty$ då det för (lite) större x gäller $\lim_{t\to 0} g(t,x) = \infty$. Vilket indikerar att integralen av absolutbeloppet $|g(t,x)|$ inte blir ändlig för små s.

Uppgift. 2
Låt $(X, \mathcal{S}, \mu)$ och $(Y, \mathcal{T}, \lambda)$ vara σ-finita måttrum. Bevisa Cavalieris princip:

Om E och F är $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$-mätbara delmängder av $X\times Y$ och $\lambda(E_x) = \lambda(F_x)$ för nästan alla $x \in X$ så är $(\mu\times\lambda)(E) = (\mu\times\lambda)(F)$. Använd detta resultat till att bevisa att de båda mynthögarna i Figur 2 har samma volym.

Figur 2: Mynthögen för upg. 2

Lösning:
Eftersom måttrumen är σ-finita är
$$(\mu\times\lambda)(E) = \int_X \lambda(E_x)\mu(dx) \quad \left(= \int_Y \mu(E^y)\lambda(dy)\right).$$

Där $E_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in E\}$. Nu följer resultatet från sats 4.43 (som är i kraft fast detta handlar om allmänna måttrum):
$$(\mu\times\lambda)(E) = \int_X \lambda(E_x)\mu(dx) = \int_X \lambda(F_x)\mu(dx) = (\mu\times\lambda)(F).$$

För att bevisa andra delen av uppgiften noterar vi att volymen av båda mynthögarna är lika med deras tre dimensionella Lebesgue mått. Då vi vill använda

Cavalieris prinzip, behandlar vi det tre dimensionella måttet m_3 som ett produktmått av "höjd" dimensionen (m_1) och "arean vid varje höjd" (m_2). Låt alltså $(X, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \text{Leb}\,\mathbb{R}, m_1)$, $(Y, \mathcal{T}, \lambda) = (\mathbb{R}^2, \text{Leb}\,\mathbb{R}^2, m_2)$, $E =$ mynthög 1 och $F =$ mynthög 2. Då arean av varje mynhög är lika stor vid varje "höjd" är $m_1(E_x) = m_1(F_x)$ för alla x. Därmed följer det från Cavlieris princip att:

$$m_3(E) = (m_1 \times m_2)(E) = (m_1 \times m_2)(F) = m_3(F).$$

OBS!: Allmånt gäller inte att $m_3(X) = (m_1 \times m_2)(X)$ eftersom det finns m_3 mätbara mängder som inte är $(m_1 \times m_2)$ mätbara. I denna uppgift antar vi att högarna har positiv volym, från vilket det följer att de är både m_3 och $(m_1 \times m_2)$ mätbara och måttena får samma värde. Detta faktum andvänds implicit i alla resten av uppgifterna där vi räknar volymen som produktmått. Skillnaderna på produktmåttet samt $3-$dimensionella Lebesgue måttet har att göra med fullständighet av mått, något som kommer att behandlas nogrannare på kurssen Reell analys 1.

Uppgift. 3
Låt m_n beteckna Lebesguemåttet i $\mathbb{R}^n$ och låt $f : [0,1] \to (0,\infty)$ vara m_1-mätbar.

(a) Visa att mängden $A(f) = \{(x,y) \in [0,1] \times (0,\infty) : 0 < y < f(x)\}$ är m_2-mätbar.

(b) Visa att

$$m_2(A(f)) = \int_0^1 f(x) dm_1(x).$$

Lösning:
Vi visar först resultatet för enkla funktioner. Det allmänna fallet följer med hjälp av MKS samt sats 4.14. Antag alltså att f är enkel och har normalframställningen:

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}.$$

Då kan $A(f)$ skrivas som en disjunkt union.

$$A(f) = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \times (0, a_i)$$

Då A_i är m_1 mätbar och $(0, a_i)$ är m_1 mätbar är $A_i \times (0, a_i)$ m_2 mätbar för alla i, därmed är även $A(f)$ m_2 måtbar.

Dessutom så gäller att:

$$m_2(A(f)) = m_2\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \times (0, a_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} m_2(A_i \times (0, a_i)) =$$

$$\sum_{i=1}^{k} m_1(A_i) m_1((0, a_i)) = \sum_{i=1}^{k} m_1(A_i) a_i = I(f) = \int_0^1 f(x) dm_1(x)$$

där den andra likheten följer från att mängderna i unionen är disjunkta.

Om f nu är en allmän mätbar funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ så existerar det enligt sats 4.14 en stigande följd enkla f_i så att $\lim_{n\to\infty} f_i = f$. Från detta följer det även att varje $f_i \leq f$ på hela intervallet $[0,1]$ och därmed är:

$$A(f) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A(f_i).$$

Dvs. $A(f)$ är en uppräcknerlig union av mätbara mängder (mätbarheten av varje $A(f_i)$ motiverades i första delen av lösningen) och är därmed m_2 mätbar. Då föjden f_i är stigande, gäller $A(f_1) \subset A(f_2) \subset \ldots$ och därmed är:

$$m_2(A(f)) = m_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A(f_i)\right) = \lim_{n\to\infty} m_2(A(f_n)) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dm_1(x) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dm_1(x) = \int_0^1 f(x)dm_1(x)$$

Där den andra likheten följer från sats 2.60 och den fjärde från MKS.

Ett alternativt sätt att härleda faktumet att $m_2(A(f)) = \int_0^1 f(x)dm_1(x)$ efter att vi bevisat att $A(f)$ är en m_2 mätbar mängd är att notera att $\mathbb{R}$ med Lebesguemåttet är ett σ-finit måttrum. Dessutom så gäller att $m_1(A(f)_x) = f(x)$ för alla $0 \leq x \leq 1$ och 0 annars. Därmed är:

$$m_2(A(f)) = \int_{\mathbb{R}} m_1(A(f)_x)dm_1(x) = \int_0^1 m_1(A(f)_x)dm_1(x) = \int_0^1 f(x)dm_1(x)$$

Uppgift. 4
Bestäm volymen av snittet av de två kropparna $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2 \leq 1\}$ och $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_3^2 \leq 1\}$ i $\mathbb{R}^3$.

Lösning:
Vi betecknar $B = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2 \leq 1\}$, $C = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_3^2 \leq 1\}$ och $A = B \cap C$. Som tidigare kan volymen av A räknas som:

$$m_3(A) = (m_1 \times m_2)(A) = \int_{\mathbb{R}} m_2(A_{x_1})dm_1(x_1).$$

Det vi måste räkna ut är alltså: $m_2(A_{x_1})$ för varje $x_1 \in \mathbb{R}$.

Vi noterar först att om $|x_1| > 1$ är $A_{x_1} = \emptyset$ och därmed $m_2(A_{x_1}) = 0$. Å andra sidan, om $-1 \leq x_1 \leq 1$ och $(x_1,x_2,x_3) \in B$ måste det gälla att $x_2 \leq \sqrt{1-x_1^2}$. På likande sätt får vi att om $(x_1,x_2,x_3) \in C$ måste $x_3 \leq \sqrt{1-x_1^2}$. För alla punkter $(x_1,x_2,x_3) \in A$ måste båda kraven gälla och därmed är

$$A_{x_1} = [-\sqrt{1-x_1^2}, \sqrt{1-x_1^2}] \times [-\sqrt{1-x_1^2}, \sqrt{1-x_1^2}]$$

och $m_2(A_{x_1}) = 4(1-x_1^2)$ för alla $-1 \leq x_1 \leq 1$.

Nu gäller alltså att:

$$m_3(A) = \int_{\mathbb{R}} m_2(A_{x_1})dm_1(x_1) = \int_{-1}^{1} m_2(A_{x_1})dm_1(x_1) = \int_{-1}^{1} 4(1-x_1^2)dm_1(x_1) = \frac{16}{3}$$

Uppgift. 5
Bestäm Lebesguemåttet av klotet $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ i $\mathbb{R}^n$.

Lösning:
Låt $V_n(r)$ beteckna volymen av det n-dimensionella klotet med radien r. Det vi söker i uppgiften är alltså $V_n(1)$.

På sidan `http://divisbyzero.com/2010/05/09/volumes-of-n-dimensional-balls/` (hämtad 5.3.2015) beskrivs ett relativt simpelt bevis för att $V_1(R) = 2R, \quad V_2(R) = \pi R^2$ och $V_n(R) = \frac{2\pi R^2}{n} V_{n-2}(R)$. Från detta kan vi i vårt specialfall härleda att: $V_n(1) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!}$ för jämna n och $V_n(1) = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{1\cdot 3\cdot \ldots}$ för udda n. Dessa två kan utryckas som en enda funktion genom att andvända gamma funktionen:

$$V_n(1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Beviset för rekursionsformeln bygger på induktion och integrering med hjälp av polära koordinater. Jag kommer här att presentera ett alternativt sätt som bygger på den s.k. Gaussiska integralen $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

Vi definierar först den n dimensionella hypersfären av radie r:

$$S^{n-1}(r) = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r\}.$$

Då är varje n dimensionel hypersfär ekvivalent mef någon $n-1$ dimensionerligt klot. Notera även att "ytan" på varje klot i n dimensioner är lika med en hypersfär i $n-1$ dimensioner, eller ekvivalent något klot i $n-1$ dimensioner. T.ex. så är ytan på en cirkel like med en linje och ytan på ett tre dimensionellt klot lika med en cirkel osv. Volymen på ett n-klot av radie 1 kan därmed utryckas som integralen:

$$V_n(1) = \int_0^1 S^{n-1}(r)dr.$$

Där $S^{n-1}(r)$ är ytarean en hypersfär i n dimensioner, eller ekvivalent volymen av $n-1$ dimensionligt klot, av radien r. Vi anser känt att om man skalar ett n dimensionerligt klot med an faktor r, ändras dess volym med en faktor r^n (fudndera t.ex. på en cirkel). Därmed får vi att $S^{n-1}(r) = S^{n-1}(1)r^{n-1}$ och att:

$$V_n(1) = \int_0^1 S^{n-1}(r)dr = S^{n-1}(1)\int_0^1 r^{n-1} = \frac{S^{n-1}(1)}{n}.$$

Vi härleder tillnäst utrycket för $S^{n-1}(r)$.

Baserat på sista exemplet i kompendiet vet vi att $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Detta går att generaliera till n dimensioner:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n e^{-x_i^2} dm_n(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

Eftersom integranden $e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}$ är rotationsinvariant
(dvs. om vi ser på $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ som en vektor i $\mathbb{R}^n$ så kan vi rotera vektorn hur som helst utan att ändra värde på $e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}$) kan vi utrycka den gaussiska integralen i (hyper)-sfäriska koordinater som:

$$\int_0^\infty \int_{S^{n-1}(r)} e^{-r^2} dA dr = S^{n-1}(1) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr$$

Notera användingen av $S^{n-1}(r) = S^{n-1}(1) r^{n-1}$.

Integralen $\int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr$ kan lösas genom att substituera: $u = r^2$

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-2} 2r dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} du = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{n}{2})$$

(Där gamma funktionen måste kännas igen). Genom att slå i samman båda resultaten får vi att:

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} dm_n(x) = S^{n-1}(1) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr = S^{n-1}(1) \frac{1}{2} \Gamma(\frac{n}{2})$$

och därmed att:

$$S^{n-1}(1) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Slutgiltigen är alltså:

$$V_n(1) = \frac{S^{n-1}(1)}{n} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Detta är samma utryck som tidigare då vi inser att gamma funktionen (som en geralisering av fakultetsfunktionen) uppfyller $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$.