Insitutionen för matemtatik och statistik
Mått- och integrationsteori
Övning 5
Förslag till Lösningar

Jeremias Berg

2 mars 2015

Definition: Låt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum och låt f_n vara en följd av reelvärdä mätbara funtioner definierade på X. Följden f_n säges *konvergera med avseende på måttet* μ mot mätbara funktionen f om det för varje $\varepsilon > 0$ gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$$

Uppgift. 1
a) Låt $X = [0, 1]$ försedd med lebesgue måttet. Ge ett exempel på en följd av funktioner f_n definierade på X som konvergerar mot 0 funktionen med avseende på Lebesgue måttet trots att f_n inte konvergerar någon punkt.

b) Visa att om $f_n \to f$ med avseende på måttet μ så har f_n en delföljd f_{n_k} som konvergerar mot f n.ö.

Lösning:
a) Idén är att medlemmarna i följden f_n är indikatorfunktioner för olika mätbara delmängder av $[0, 1]$ med avtagande mått. För att garantera att f_n inte konvergerar mot 0 i någon punkt $x \in [0, 1]$ ser vi till att om $f_n = \chi_A$ och $f_{n+1} = \chi_B$ så gäller $A \cap B = \emptyset$.

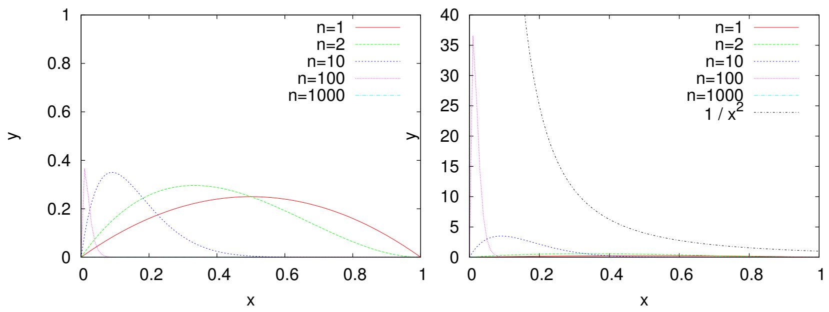
Mer formellt låter vi $f_n = \chi_{I_n}$ och definierar följden I_n rekursivt. Låt först $I_1 = [0, 1]$ och antag att $I_{n-1} = [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$ har blivit definierad. Då är:

$$f_n = \begin{cases} \left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right] & \text{om } i + 1 \leq k \\ \left[\frac{0}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right] & \text{annars.} \end{cases}$$

Nu gäller att

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = \lim_{n\to\infty} m(I_n) = 0$$

för alla $0 < \varepsilon \leq 1$. Observera att: $m\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$ för alla $\varepsilon > 1$. Därmed konvergerar f_n mot 0 med avseende på Lebesguemåttet. Å andra



Figur 1: Funktionsföljderna f_n (vänster) och g_n (höger) i uppgift 2

sidan så gäller det för varje $x \in [0,1]$ att $x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ för godtyckligt stora n och något i (som naturligtvis beror på n). Detta betyder, att det finns godtyckligt stora index n för vilka $f_n(x) = 1$ och därmed konvergerar inte följden f_n mot 0 i någon punkt $x \in [0,1]$.

b) Först: Om en ändlig följd f_n konvergerar mot f med avseende på måttet måste det för det sista elementet $f_{n'}$ och alla $\varepsilon > 0$ gälla att

$$\mu\left(\{x \in X \mid |f(x) - f_{n'}(x)| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Därmed måste $f(x) = f_{n'}(x)$ för nästan varje $x \in X$ och vi kan välja hela följden f_n som den efterfrågade delföljden som konvergerar nästan överallt.

Vi löser oändliga fallet genom en antites. Antag att inga delföljder f_{n_k} konvergerar mot f ens nästan överallt. Fixera nu en godtycklig oändlig delföljd f_{n_k}. Från antitesen följer att det existerar $A \subset X$ och ett $\epsilon > 0$ så att $\mu(A) > 0$ och $|f(x) - f_{n_k}(x)| > \epsilon$ för alla $x \in A$ och godtyckligt stora n_k. Eftersom delföljden f_{n_k} är oändlig är $A \subset \{x \in X \mid |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$ för godtykligt stora index från den ursprungliga följden f_n. Därmed är

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \geq \mu(A) > 0$$

vilket är en motsägelse.

Uppgift. 2

Låt $X = [0,1]$ vara försedd med Lebesguemåttet och betrakta funktionsföljderna f_n och g_n definierade genom:

$$f_n(x) = nx(1-x)^n, \qquad g_n(x) = nf_n(x) = n^2x(1-x)^n$$

Kan man tillämpa: a) Satsen om monoton konvergens? b) Fatous Lemma? c) Satsen om dominerad konvergens?

Lösning:

Vi noterar att alla funktioner i båda föjderna är kontinuerliga och därmed mätbara. Några exempel av medlemmarna i uppgiftens funktionsföljder finns i Bild 1. Fast en bild ensam inte duger som bevis, kan vi baserat på dem få en ganska bra uppfattning om vad som är värt att försöka bevisa. Vi ser t.ex. att båda följderna verkar vara avtagande på “andra halvan” av $[0,1]$. Detta föreslår att antaganden för MKS inte uppfylls (på hela intervallet) av någondera följden. Vi bevisar detta till näst:

Beviset är simpelt, notera att för alla $n > 2$ gäller:

$$\frac{f_n\left(\frac{1}{2}\right)}{f_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > 1.$$

Dvs. $f_n\left(\frac{1}{2}\right) > f_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$ och därmed uppfylls inte kraven för MKS. På liknande sätt gäller:

$$\frac{g_n\left(\frac{1}{2}\right)}{g_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 > 1$$

för $n > 2$. Vilket visar, att MKS inte går att använda på någondera följden.

Å andra sidan gäller för alla n och $x \in [0, 1]$ att både $f_n(x) \geq 0$ och $g_n(x) \geq 0$. Därmed uppfylls antagandena för Fatous lemma och vi kan dra slutsatsen:

$$\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$$

och

$$\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} g_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 g_n.$$

Slutligen så noterar vi att:

$$f'(x) = n((1-x)^{n-1}(1 - x(n+1)))$$

och att $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{n+1}$. Genom att t.ex. analysera andra derivatan kan vi dra slutsatsen att varje f_n uppnår sitt maximum värde vid punkten $x = \frac{1}{n+1}$. Därmed kan vi räkna ut maximivärdet för f_n funktion genom enkel insättning:

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 1$$

eftersom $y^m < 1$ för alla $y < 1$ och $m > 1$. Därmed dominerar konstanta funktionen $g(x) = 1$ varje f_n funktion på hela intervallet $[0, 1]$ så antagandena för DKS (eller tekniskt sett BKS) uppfylls av följden f_n. Därmed gäller att:

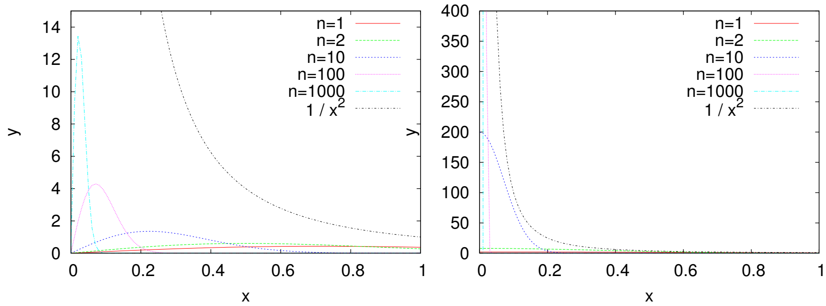
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n.$$

För att undersöka ifall antaganden för DKS uppfylls av följden g_n observerar vi först att bild 1 föreslår att maximivärdena för funktionen verkar gå mot oändligheten. Vi bevisar detta till näst.

Som en funktion på x är varje g_n en konstant (n) gånger f_n. Därmed uppnår g_n sina maximum på samma ställen som f_n, vid $\frac{1}{n+1}$. Därmed är maximum värdet för varje g_n funktion lika med:

$$g_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} =$$
$$\left(\sqrt[n]{n} - \frac{\sqrt[n]{n}}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\sqrt[n]{n} - \frac{n}{n+1}\right)^{n+1} =$$
$$\left(\sqrt[n]{n} - 1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} \to \infty$$

då $n \to \infty$. Dvs, för alla $M > 0$ existerar ett n så att $g_n\left(\frac{1}{n+1}\right) > M$ för något n. Då g_n är kontinuerlig så existerar även ett intervall (med positivt mått) $\frac{1}{n+1} \in (a,b) \subset [0,1]$ där $g_n(x) > M$ för alla $x \in (a,b)$. Därmed kan ingen enskild integrerbar funktion dominera hela följden g_n.



Figur 2: Funktionsföljderna f_n (vänster) och g_n (höger) i uppgift 3

Uppgift. 3
Samma fråga som uppgift 2 men för $X = (0, \infty)$ och

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \qquad g_n(x) = 2n^2e^{-n^2x^2}$$

Lösning:
Vi noterar åter att alla funktioner i båda följderna är kontinuerliga och därmed mätbara. Några element från uppgiftens funktionsföljder finns i Bild 2. Åter igen så verkar inte kraven för MKS uppfyllas. Nämligen så gäller:

$$\frac{f_n(1)}{f_{n+1}(1)} = e\left(1-\frac{1}{n+1}\right) > 1$$

och

$$\frac{g_n(1)}{g_{n+1}(1)} = e^{2n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2 > 1$$

vilket visar att $f_{n+1}(1) < f_n(1)$ och $g_{n+1}(1) < g_n(1)$ för alla n. Därmed går inte MKS att tillämpa på någondera följden.

Å andra sidan så gäller $f_n \geq 0$ och $g_n \geq 0$ för alla n och $x \in (0, \infty)$. Därmed uppfylls antagandena för Fatous lemma och vi kan dra slutsatsen:

$$\int_{(0,\infty)} \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} f_n$$

och

$$\int_{(0,\infty)} \liminf_{n\to\infty} g_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} g_n.$$

Slutligen så visar vi igen att maximivärdena för både f_n och g_n på intervallet går mot oändligheten. För f_n gäller:

$$f_n'(x) = \frac{n}{e^{nx^2}}\left(1 - 2nx^2\right)$$

Genom att lösa $f_n'(x) = 0$ och studera andra derivatorna, kan vi dra slutsatsen att f_n uppnår sitt maximi vid punkten $\frac{1}{\sqrt{2n}}$. Därmed är maximivärdet för f_n lika med:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2e}} \to \infty$$

då $n \to \infty$. Så som för följden g_n i uppgift 2, betyder detta att antaganden för DKS inte uppfylls av följden f_n.

För att visa motsvarande resultat för följden g_n noterar vi först att:

$$g_n'(x) = -\frac{4n^4x}{e^{n^2x^2}}.$$

Därmed har g_n inga extrempunkter på intervallet $(0, \infty)$. Men eftersom $g_n'(x) < 0$ för alla $x \in (0, \infty)$ så är g_n avtagande. Dessutom så är:

$$\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = 2n^2$$

och därmed uppnår varje $g_n(x)$ värden godtyckligt nära $2n^2$ på intervallet $x \in (0, \infty)$. Därmed så uppnår även följden g_n godtyckligt stora värden, så den domineras inte heller av en enskild integrerbar funktion.

Uppgift. 4
Låt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum. Låt $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ vara måttbara funktioner. Antag att $f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq 0$ och att $\int_X f_1 d\mu < \infty$. Visa att

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

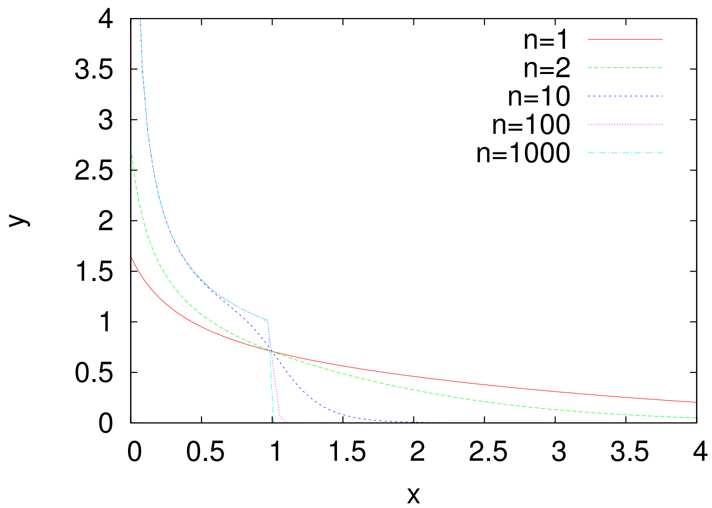
Lösning:
Vi skulle vilja använda oss av den monotona konvergenssatsen. För att åstadkomma detta definierar vi $g_n = f_1 - f_n$. Då gäller $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$. Dessutom är varje g_n mätbar och därmed gäller:

$$\begin{gathered}\int_X f_1 d\mu - \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_1 d\mu - \int_X f_n d\mu\right) = \\ \lim_{n\to\infty} \int_X (f_1 - f_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \\ \int_X \lim_{n\to\infty} g_n = \int_X \lim_{n\to\infty} (f_1 - f_n) = \\ \int_X (f_1 - \lim_{n\to\infty} f_n) = \int_X f_1 d\mu - \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu\end{gathered}$$

Notera användingen av MKS för följden g_n. Från detta följer uppgiftens påstående med hjälp av antagandet $\int_X f_1 d\mu < \infty$.

Uppgift. 5
Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x + e^{n(x-1)}}}$$



Figur 3: Funktionsföljden som skall integreras i uppgift 5

Lösning:
Vi noterar att $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+e^{n(x-1)}}}$ är en mätbar icke negativ funktion för alla n och $x \in [0, \infty)$.

Bild 3 demonstrerar den viktigaste egenskapen i uppgiftens funktionsföljd, notera vad som händer vid $x = 1$. För att beräkna uppgiftens gränsvärde noterar vi att:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x + e^{n(x-1)}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x + e^{n(x-1)}}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x + e^{n(x-1)}}} \right) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x + e^{n(x-1)}}} \right) + \lim_{n\to\infty} \left(\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x + e^{n(x-1)}}} \right)$$

Där sista steget följer från att funktionerna i fråga är positiva och därmed uppstår inte $\infty - \infty$ fallet.

Om $x \in [0, 1]$ så är $(x - 1) < 0$ och då gäller

$$\frac{1}{\sqrt{x + e^{(n+1)(x-1)}}} > \frac{1}{\sqrt{x + e^{n(x-1)}}}$$

för alla n. Detta betyder att vi kan använda MKS och dra slutsatsen att:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+e^{n(x-1)}}} = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+e^{n(x-1)}}} =$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$$

Å andra sidan, om $x > 1$ så är:

$$\frac{1}{\sqrt{x+e^{n(x-1)}}} \le \frac{1}{\sqrt{e^{n(x-1)}}} \le \frac{1}{\sqrt{e^{(x-1)}}}$$

Så om vi lyckas visa att $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{(x-1)}}}$. är en integrerbar funktion på intervallet $(1,\infty)$ så kan vi använda DKS för att beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+e^{n(x-1)}}}\right)$$

För att visa att f är en integrerbar funktion studerar vi den växande funktionsföljden

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) \text{ om } x < n \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$$

Nu är:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx =$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n f_n(x)dx =$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{e^{(n-1)}}}\Big|_1^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{e^{(n-1)}}} - (-2)\right) = 2 < \infty$$

Så f är integrerbar och därmed gäller (enligt DKS) att:

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+e^{n(x-1)}}} = \int_1^\infty \lim_{n\to\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+e^{n(x-1)}}} =$$
$$\int_1^\infty 0 = 0.$$

och därmed är:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+e^{n(x-1)}}} =$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+e^{n(x-1)}}}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+e^{n(x-1)}}}\right) =$$
$$2 + 0 = 2$$

Uppgift. 6
Låt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum. Visa att:

a) om $f\colon X \to [0,\infty]$ är mätbar, $E \in \mathcal{M}$ och $\int_E f d\mu = 0$, så är $f(x) = 0$ för nästan varje $x \in E$.

b) om $f \in L^1(\mu)$ och $\int_E f d\mu = 0$ för alla $E \in \mathcal{M}$ är $f(x) = 0$ för n.v. $x \in X$.

c) om $f \in L^1(\mu)$ och

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \int_X |f| d\mu$$

så finns det en konstant $\alpha \in \mathbb{C}$ så att $\alpha f(x) = |f(x)|$ för nästan varje $x \in X$.

Lösning:
a) Låt

$$A_n = \{x \in E \mid f(x) > \frac{1}{n}\}.$$

Då är varje $A_n \subset E$ mätbar och

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int_{A_n} f d\mu \leq \int_E f d\mu = 0$$

så $\mu(A_n) = 0$. Vidare är:

$$\{x \in X \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

så

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0.$$

b) Vi följer notationerna från kapitel 4.34. i kompendiet. Notera att:

$$\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X | f^+(x) > \frac{1}{n}\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X | f^1(x) > \frac{1}{n}\}.$$

Alla dessa mängder är mätbara, så det räcker (så som ovan) att visa: $\mu(\{x \in X | f^+(x) > \frac{1}{n}\}) = 0$ och $\mu(\{x \in X | f^+(x) > \frac{1}{n}\}) = 0$ för alla n. Funktionerna är analoga, så vi visar $\mu(\{x \in X | f^+(x) > \frac{1}{n}\}) = 0$ för alla n. Beteckna $A_n = \{x \in X | f^+(x) > \frac{1}{n}\}$. Beviset är väldigt lika fall a). Notera att om $f^x(x) > \frac{1}{n}$ är $f^-(x) = 0$ och därmed är $\int_{A_n} f^- d\mu = 0$. Nu gäller:

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int_{A_n} f^+ d\mu = \int_{A_n} f^+ d\mu - \int_{A_n} f^- d\mu = \int_{A_n} f^+ - f^- d\mu = \int_{A_n} f d\mu = 0$$

Så $\mu(A_n) = 0$, vilket tillsammans med diskussionen ovan visar uppgiftens påstående.

c) Vi öppnar upp definitionerna:

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right|$$

och

$$\int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$$

Eftersom integralerna i fråga är reella tal (då $f \in L^1(\mu)$) får vi från antagande att:

$$\left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$$

och baserat på reella talens egenskaper därmed att

$$\int_X f^+ d\mu = 0 \Rightarrow f^+(x) = 0 \text{ för nästan varje } x \in X$$

eller

$$\int_X f^- d\mu = 0 \Rightarrow f^-(x) = 0 \text{ för nästan varje } x \in X.$$

I det första fallet är $f(x) \leq 0$ för nästan varje $x \in X$ och vi kan välja $\alpha = -1$. I det andra fallet är $f(x) \geq 0$ för nästan varje $x \in X$ och vi kan välja $\alpha = 1$.