Insitutionen för matemtatik och statistik
Mått- och integrationsteori
Övning 4
Förslag till Lösningar

Jeremias Berg

16 februari 2015

Uppgift. 1
Låt $(X, \mathcal{M})$ vara ett mätbart rum och $f \colon X \to \mathbb{R}$. Visa att om mängden $\{x \in X \mid f(x) \geq q\}$ är mätbar för alla $q \in \mathbb{Q}$ så är f en mätbar funktion.

Lösning:
Även om sats 3.12 i kompendiet är definierad för en delmängd $A \subset \mathbb{R}^n$ och $f \colon A \to \bar{\mathbb{R}}$ så fungerar samma bevis för ett allmänt måttrum. Så eftersom $X \in \mathcal{M}$ så räcker det att visa att mängden $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ är mätbar ($\in \mathcal{M}$) för alla $a \in \mathbb{R}$.

Låt alltså $a \in \mathbb{R}$ vara g.t.

1) Om $a \in \mathbb{Q}$ är

$$\{x \in X \mid f(x) < a\} = \{x \in X \mid f(x) \geq a\}^c$$

och därmed mätbar baserat på antagandet och sigma algebrans egenskaper.

2) Annars så är

$$\{x \in X \mid f(x) < a\} = \bigcup_{q<a} \{x \in X \mid q \in \mathbb{Q}, f(x) < q\}$$

nämligen om $f(x) < a$ är också $f(x) < q$ för något $q < a$. Därmed är $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ en uppräcknerlig union av mätbara mängder och därmed mätbar.

Uppgift. 2
Låt a_n och b_n vara talföljder i $\bar{\mathbb{R}}$. Bevisa följande påståenden:

1. $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)$
2. $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$ så länge högra sidan inte är av formen $\infty - \infty$. Ge även exempel på följder a_n och b_n där olikheten är äkta.
3. Om $a_n \leq b_n$ för alla n så är $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

Lösning:
Vi påminner oss först om definitionerna:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k$$

Notera att dessa gränsvärden tas i $\bar{\mathbb{R}}$ dvs. baserat på överenskommelserna i början på kapitel 2.2 i kompendiet. Därmed kommer de flesta av de, från Analys 1 kursen, kända egenskaperna för gränsvärden gälla utan att oändlighetspunkterna måste betraktas skillt.

1) Låt $n \in \mathbb{N}$ vara g.t. Baserat på uppgift 1 i Övning 1 gäller:

$$\sup_{k\geq n}(-a_n) = -\inf_{k\geq n} a_n.$$

Därmed gäller även att:

$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}(-a_n) = \lim_{n\to\infty}(-\inf_{k\geq n} a_n) = -\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_n = -\liminf_{n\to\infty} a_n$$

2) Låt n åter igen vara godtycklig. Nu gäller $\{a_{k'}\} \subset \{a_k \mid k \geq n\}$ för alla $k' \geq n$ så enligt uppgift 1 övning 1 är:

$$a_{k'} = \sup\{a_{k'}\} \leq \sup\{a_k \mid k \geq n\} \text{ för alla } k' \geq n$$

Motsvarande resultat gäller naturligtvis för följden b_n också. Nu gäller alltså (för alla $k' \geq n$) också att:

$$a_{k'} + b_{k'} \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k$$

och därmed att

$$\sup_{k\geq n}(a_k + b_k) \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k.$$

Slutgiltigen får vi att:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}(a_k + b_k) \leq \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k) &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} b_k \\ &= \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n\end{aligned}$$

där näst-sista steget använder antagandet om att högra sidan av olikheten inte är av formen $\infty - \infty$.

För ett exempel av följder där olikheten är äkta låt $(a_n) = (-1, 1, -1, 1 \ldots)$ och $(b_n) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$. Då är $\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 1$ så högra sidan av olikheten blir 2. Å andra sidan är $a_n + b_n = 0$ för alla n så $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$.

3) Det räcker att visa att

$$\inf_{k\geq n} a_k \leq \inf_{k\geq n} b_k$$

för alla n (resten följer genom att ta gränsvärden liknande som i punkt 2 och 3).

Vi gör en antites, antag alltså $\inf_{k\geq n} a_k > \inf_{k\geq n} b_k$ för något n. Då, baserat på infimums egenskaper, existerar det ett $n' \geq n$ för vilket $b_{n'} < \inf_{k\geq n} a_k$. Då är $b_{n'}$ strikt mindre än a_k för alla $k \geq n$. Då $n' \geq n$ så gäller specifikt att $b_{n'} < a_{n'}$, vilket är en motsägelse.

Uppgift. 3

För en följd delmängder A_n till en mängd X definieras limes inferior och limes superior genom:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n\right)$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\right)$$

Låt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum och antag att $A_i \in \mathcal{M}$ för alla i. Bevisa följande egenskaper:

1. $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X \mid x \in A_i$ för oändligt många index $i\}$
2. $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X \mid x \notin A_i$ endast för ändligt många index $i\}$
3. $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{M}$, $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{M}$ och

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} \mu(A_k)\right).$$

4. Om $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ så är:

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} \mu(A_k)\right).$$

5. Om $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ är $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$ (Borell-Cantelli).

Lösning:

1) Vi betecknar $A = \{x \in X \mid x \in A_i$ för oändligt många index $i\}$.

a) $\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A \Leftrightarrow A^c \subset (\limsup_{n\to\infty} A_n)^c$.
Antag $x \notin A$. Då är $x \in A_i$ endast för ändligt många i. Därmed existerar ett n' så att $x \notin A_k$ för alla $k \geq n'$. Då är $x \notin \bigcup_{k=n'}^{\infty} A_k$ och därmed gäller:

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n \right) = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

b) $A \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$
Antag $x \in A$. Då existerar för alla n ett $n' \geq n$ för vilket $x \in A_{n'}$. Därmed är $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ för alla n. Från detta följer även att

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n \right) = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

2) Beviset följer i stora drag punkt 1 så jag lämnar bort en del detaljer. Beteckna: $B = \{x \in X \mid x \notin A_i \text{ endast för ändligt många index } i\}$.

a) $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset B \Leftrightarrow B^c \subset (\liminf_{n\to\infty} A_n)^c$
Antag $x \notin B$. Då existerar det godtyckligt stora n för vilka $x \notin A_n$. Då är $x \notin \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ för något n och därmed är $x \notin \liminf_{n\to\infty} A_n$.

b) $B \subset \liminf_{n\to\infty} A_n$
Antag $x \in B$. Då existerar ett största index i för vilket $x \notin A_i$. Då är $x \in \bigcap_{k=i+1}^{\infty} A_k$ och därmed är $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$.

3) Påståendena $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{M}$ och $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{M}$ följer från att båda konstrueras genom uppräcknerliga unioner och snitt av mätbara mängder.

Notera nu att $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k \subset \ldots$. Då gäller enligt sats 2.60 att:

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n \right) \right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n \right). \tag{1}$$

Dessutom så gäller för ett fixerat n att $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n \subset A_k$ för alla $k \geq n$. Därmed gäller även att $\mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n\right) \leq \mu(A_k)$, då olikheten gäller för alla $k \geq n$ kan vi dra slutsatsen:

$$\mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n \right) \leq \inf_{k\geq n} \mu(A_k)$$

vilket med hjälp av Ekvation 1 även betyder att:

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n \right) \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \mu(A_k).$$

4) Åter igen är beviset lika punkt 3. Notera att tack vare antagandet $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$ och faktumet att

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \supset \ldots$$

kan vi använda sats 2.61 för att konstatera att:

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\right).$$

Härifrån följer resten av beviset analogt till punkt 3) genom att notera att $A_{k'} \subset \bigcup_{k=n} A_k$ för alla n och $k' > n$.

5) Så som i punkt 4) (notera att antagandet $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) < \infty$ implicerar även att $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$) är:

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\right).$$

Dessutom, eftersom $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) < \infty$ så gäller även att $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k) = 0$, vilket motiveras t.ex. i Analys 2 kursen. Därmed får vi baserat på måttets subadditivitet att:

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\right) \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k) = 0.$$

Uppgift. 4
Låt $f = 2\chi_{[0,3]} + 5\chi_{[1,6]} + 3\chi_{\mathbb{Q}}$. Visa att f är en mätbar enkel funktion och bestäm dess normalframställning. Beräkna Integralen $\int f dm$

Lösning:
För att visa att f är enkel visar vi att f är mätbar och antar ändligt många värden. Bara genom att studera f märker vi att $f(\mathbb{R}) = \{0, 2, 3, 5, 7, 8, 10\}$, dvs. f antar ändligt många olika värden. Mätbarheten av f följer från exempel 3.8 och sats 3.11. Eftersom mängderna $[0, 3]$, $[1, 6]$ och $\mathbb{Q}$ är mätbara är funktionerna $\chi_{[0,3]}, \chi_{[1,6]}$ och $\chi_{\mathbb{Q}}$ mätbara (ex 3.8). Då är även f mätbar då f är en summa av skalärprodukter av mätbara funktioner (sats 3.11).

För att få fram f:s normalframställning måste vi beräkna urbilden $A_k = f^{-1}(a_k)$ för alla $a_k \in f(\mathbb{R})$. Vi ordnar värdena som f kan anta i växande ordning. Dvs. $a_1 = 0, a_2 = 2, \dots a_7 = 10$. Då är urbilderna samt deras mått lika med:

$$\begin{aligned}
&A_1 = f^{-1}(0) = [0,6]^c \cap \mathbb{Q}^c && \mu(A_1) = \infty\\
&A_2 = f^{-1}(2) = [0,1) \cap \mathbb{Q}^c && \mu(A_2) = 1\\
&A_3 = f^{-1}(3) = [0,6]^c \cap \mathbb{Q} && \mu(A_3) = 0\\
&A_4 = f^{-1}(5) = ((3,6] \cap \mathbb{Q}^c) \cup ([0,1) \cap \mathbb{Q}) && \mu(A_4) = 3\\
&A_5 = f^{-1}(7) = [1,3] \cap \mathbb{Q}^c && \mu(A_5) = 2\\
&A_6 = f^{-1}(8) = (3,6] \cap \mathbb{Q} && \mu(A_6) = 0\\
&A_7 = f^{-1}(10) = [1,3] \cap \mathbb{Q} && \mu(A_7) = 0
\end{aligned}$$

Nu är f:s normalframställning lika med:

$$f = 0\chi_{A_1} + 2\chi_{A_2} + 3\chi_{A_3} + 5\chi_{A_4} + 7\chi_{A_5} + 8\chi_{A_6} + 10\chi_{A_7}$$

Från vilket integralen kan enkelt räknas ut:

$$\int fdm = I(f) = 0\mu(A_1)+2\mu(A_2)+3\mu(A_3)+5\mu(A_4)+7\mu(A_5)+8\mu(A_6)+10\mu(A_7) = 31$$

Uppgift. 5
Låt $f(x) = x$ för $x \in [0,1]$. Använd definitionen på Lebesgue integralen för att beräkna $\int_0^1 fdm$.

Lösning:
Först märker vi att $f\chi_[0,1] \colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ är mätbar. (Följer t.ex. med hjälp av sats 3.12). Därmed kan vi beräkna dess Lebesgue integral. Enligt definition 4.15 är:

$$\int_0^1 fdm = \int f\chi_{[0,1]} = \sup\{I(\varphi) \mid \varphi \text{ är enkel och } \varphi \leq f\chi_{[0,1]}\}$$

Vi löser uppgiften genom att först definiera en växande följd enkla funktioner $f_n \leq f\chi_{[0,1]}$, sedan beräkna $\sup\{I(f_n)\}$ och slutligen visa att för alla enkla $\varphi \leq f\chi_{[0,1]}$ existerar ett n så att $I(f_n) \geq I(\varphi)$, vilket bevisar att

$$\sup\{I(f_n)\} = \sup\{I(\varphi) \mid \varphi \text{ är enkel och } \varphi \leq f\chi_{[0,1]}\}.$$

Definiera nu:

$$f_n = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n})}$$

Då är $f_n \leq f$ för alla x, vilket följer från att $f(x) \geq \frac{i-1}{2^n}$ för alla $x \in [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})$. Vidare är varje f_n enkel, vilket motiveras precis som funktionen f i uppgift 4. Nu är:

$$I(f_n) = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n})} = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{i-1}{2^n} m\left([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{i-1}{2^n}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{2^n}(i-1) = \frac{2^n(2^n-1)}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$$

Då $I(f_n)$ är en växande följd är $\sup_n(I(f_n)) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) = \frac{1}{2}$. Kvar blir alltså att visa att detta är supremum för integralen av alla enkla funktioner som är mindre än $f\chi_{[0,1]}$

Låt alltså φ vara en godtycklig enkel funktion $\varphi \leq f\chi_{[0,1]}$. För det första noterar vi att $\varphi(x) = 0 \leq f_n(x)$ för alla n och $x \in [0,1]^c$. Vidare är $I(\varphi) = I(\varphi,[0,1]^c) + I(\varphi,[0,1])$ för **alla** enkla funktioner. Då $I(\varphi,[0,1]^c) = 0$ för alla enkla $\varphi \leq f\chi_{[0,1]}$ räcker det att hitta ett n s.a $I(f_n,[0,1]) \geq I(\varphi,[0,1])$.

Vi gör några observationer. För alla n och $x \in [0,1]$ är:

$$0 \leq |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n} \tag{2}$$

Dessutom är varje f_n icke avtagande i $[0,1]$, dvs $f_n(x) \geq f_n(x')$ för alla $x \geq x'$. Låt nu normalframställningen av φ vara.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i\chi_{A_i}$$

där $A_i = f^{-1}(a_k)$. Fixera nu ett $\epsilon > 0$ och beteckna

$$A'_i = \{x \in A_i \mid |f(x) - \varphi(x)| \geq \frac{\epsilon}{k}.$$

Då är $\tau_i = \inf\{|f(x) - \varphi(x)| \mid x \in A'_i\} > 0$ och baserat på ekvation 2 hittar vi ett f_{n_i} s.a. $|f(x) - f_n(x)| < \tau_i$ för alla $x \in A'_i$. Vi kan välja ett sådant n_i för alla τ_i och genom att beteckna $n' = \max\{n_1, \ldots n_k\}$ får vi att $f_{n'} > \varphi$ för alla $x \in \bigcup_{i=1}^k A'_i$. O andra sidan, eftersom $\varphi(x) \leq f(x)$ för alla $x \in [0,1]$ måste

$$A_i \setminus A'_i = \{|f(x) - \varphi(x) < \frac{\epsilon}{k} \mid x \in A_i\} \subset [a_k, a_k + \frac{\epsilon}{k}]$$

Så $m(\bigcup_{i=1}^k A_i \setminus A'_i) \leq \sum_{i=1}^k m([a_k, a_k + \frac{\epsilon}{k}]) = \epsilon$ och då ϵ var godtyckligt kan vi förminska på det och på så sätt försäkra oss om att $I(f_n, [0,1]) \geq I(\varphi, [0,1])$, vilket skulle visas.