Insitutionen för matematik och statistik
Mått- och integrationsteori
Våren 2015
Övning 3
Modellsvar (H.W.)

Uppgift 1. På föreläsningarna har limes superior och limes inferior av en följd $\{a_n\}$ av element i $\overline{\mathbb{R}}$ definierats så här:

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = \inf_{k\geq 1}\sup_{n\geq k}\{a_n\}, \quad \liminf_{n\to\infty}\{a_n\} = \sup_{k\geq 1}\inf_{n\geq k}\{a_n\}.$$

Låt S vara mängden av all $x \in \overline{\mathbb{R}}$ för vilka det finns en delföljd $\{a_{n_k}\}$ som konvergerar mot x. Visa, att $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = \sup S$ och $\liminf_{n\to\infty}\{a_n\} = \inf S$.

Lösning: Vi betecknar: $LS := \limsup_{n\to\infty}\{a_n\}$ och $LI := \liminf_{n\to\infty}\{a_n\}$ samt $b_k = \sup_{n\geq k}\{a_n\}$ och $c_k = \inf_{n\geq k}\{a_n\}$ för alla $k \in \mathbb{N}$. Eftersom $b_1 \geq b_2 \geq b_3$ så existerar gränsvärdet $\lim_{k\to\infty} b_k$ och $LS = \lim_{k\to\infty} b_k$. På motsvarande sätt är $LI = \lim_{k\to\infty} c_k$.

Vi visar först $\boxed{LS = \sup S}$.

$\boxed{\sup S \leq LS :}$ Låt $x \in S$, alltså $\exists$ en delföljd $\{a_{n_k}\}$ som konvergerar mot x. Eftersom $b_k \to LS$ så gäller också $b_{n_k} \to LS$. Eftersom $a_n \leq b_n$ for all n så gäller

$$x = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = LS$$

Därmed $\sup S \leq LS$.

$\boxed{\sup S \geq LS :}$ Om $LS = -\infty$ är saken klar.

Anta, $LS \neq -\infty$. Vi visar att $LS \in S$ och därmed är $\sup S \geq LS$.

Om $\boxed{LS = +\infty}$ så gäller $b_k = +\infty$ för alla $k \in \mathbb{N}$. Per definition av talen b_k så existerar det för varje $k \in \mathbb{N}$ åtminstone ett index $n_k \geq k$ så att $k < a_{n_k}$. Genom att alltid välja det minsta indexet som satisfierar denna olikhet får vi en indexföljd $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots$ där $n_k \to \infty$. Eftersom $n_k \to \infty$ kan vi anta (genom att välja en delföljd vid behov) att $n_1 < n_2 < \cdots$. Eftersom $k \to +\infty$ så gäller $\lim_k a_{n_k} = +\infty = LS$. Därmed gäller $LS \in S$.

Om $\boxed{LS \in \mathbb{R}}$ så existerar per definition av talen b_k för varje $k \in \mathbb{N}$ åtminstone ett index $n_k \geq k$ så att $b_k - \dfrac{1}{k} < a_{n_k} \leq b_k$. Genom att alltid välja det minsta indexet som satisfierar denna olikhet får vi en indexföljd $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots$ där $n_k \to \infty$. Eftersom $n_k \to \infty$ kan vi anta (genom att välja en delföljd vid behov) att $n_1 < n_2 < \cdots$. Eftersom $1/k \to 0$ så gäller $\lim_k a_{n_k} = \lim_k b_k = LS$. Därmed gäller $LS \in S$.

$\boxed{LI = \inf S}$ visas på motsvarande sätt:

$\boxed{\inf S \geq LI:}$ Låt $x \in S$, alltså $\exists$ en delföljd $\{a_{n_k}\}$ som konvergerar mot x. Eftersom $c_k \to LI$ så gäller också $c_{n_k} \to LI$. Eftersom $a_n \geq c_n$ for all n så gäller

$$x = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \geq \lim_{k\to\infty} c_{n_k} = LI$$

Därmed $\inf S \geq LI$.

$\boxed{\inf S \leq LI:}$ Om $LI = +\infty$ är saken klar.

Anta, $LI \neq +\infty$. Vi visar att $LI \in S$ och därmed är $\inf S \leq LI$.

Om $\boxed{LS = -\infty}$ så gäller $c_k = -\infty$ för alla $k \in \mathbb{N}$. Per definition av talen c_k så existerar det för varje $k \in \mathbb{N}$ åtminstone ett index $n_k \geq k$ så att $-k > a_{n_k}$. Genom att alltid välja det minsta indexet som satisfierar denna olikhet får vi en indexföljd $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots$ där $n_k \to \infty$. Eftersom $n_k \to \infty$ kan vi anta (genom att välja en delföljd vid behov) att $n_1 < n_2 < \cdots$. Eftersom $-k \to -\infty$ så gäller $\lim_k a_{n_k} = -\infty = LI$. Därmed gäller $LI \in S$.

Om $\boxed{LI \in \mathbb{R}}$ så existerar per definition av talen c_k för varje $k \in \mathbb{N}$ åtminstone ett index $n_k \geq k$ så att $c_k + \dfrac{1}{k} > a_{n_k} \geq c_k$. Genom att alltid välja det minsta indexet som satisfierar denna olikhet får vi en indexföljd $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots$ där $n_k \to \infty$. Eftersom $n_k \to \infty$ kan vi anta (genom att välja en delföljd vid behov) att $n_1 < n_2 < \cdots$. Eftersom $1/k \to 0$ så gäller $\lim_k a_{n_k} = \lim_k c_k = LI$. Därmed gäller $LI \in S$.

Uppgift 2._Låt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum. Visa, att om $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{M}$ uppfyller villkoret $\mu(E_i \cap E_j) = 0$ då $i \neq j$, så gäller_

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Lösning: Antag att $E_1, E_, \ldots \in \mathcal{M}$ uppfyller villkoret $\mu(E_i \cap E_j) = 0$ då $i \neq j$. Vi visar först med induktion att

$\boxed{\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i) \text{ för alla } k \in \mathbb{N}:}$ Detta gäller uppenbarligen för $k = 1$.

Antag, att påståendet gäller för något k. Då gäller:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \mu(E_i) &= \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i) + \mu(E_{k+1}) \\
&\overset{(i)}{=} \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\Big) + \mu(E_{k+1}) \\
&\overset{(ii)}{=} \mu\Big((\bigcup_{i=1}^{k} E_i) \cup E_{k+1}\Big) + \mu\Big((\bigcup_{i=1}^{k} E_i) \cap E_{k+1}\Big) \\
&= \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i\Big) + \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} (E_i \cap E_{k+1})\Big) \\
&\overset{(iii)}{=} \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i\Big)
\end{aligned}$$

(i): Ind.ant.
(ii): Iakttagelsen nedan.
(iii): $\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k}(E_i \cap E_{k+1}) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i \cap E_{k+1}) = 0$ p.g.a. måttets subadditivitet (*) & antagandet i uppgiften.

Alltså gäller $\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i)$för alla $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Därmed

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \overset{S2.60}{=} \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\Big) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

(övertyga dig själv om att vi kan använda sats 2.60 ovan)

$\boxed{\text{Iakttagelse:}}$ För varje $A, B \in \mathcal{M}$ gäller

$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B)$, $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$ och $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$

på basis av måttets σ-additivitet. Således gäller,

$$\begin{aligned}
\mu(A) + \mu(B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\
&= \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Måttets subadditivitet:}}$ Ekvationen ovan ger att $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ och genom induktion får vi måttets (ändliga) subadditivitet (*):

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)$$

för mängder $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}$.

Uppgift 3. *Låt X vara ett topologiskt rum och beteckna σ-algebran av alla Borelmängder $\mathcal{B}$. Definiera $\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{G}_\delta \in \mathcal{P}(X)$ på följande sätt:*

$$\mathcal{F}_\sigma = \Big\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i : F_i \subset X \text{ är sluten för alla } i \Big\},$$
$$\mathcal{G}_\delta = \Big\{ \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i : G_i \subset X \text{ är öppen för alla } i \Big\}.$$

Visa att $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{B}$ och $\mathcal{G}_\delta \subset \mathcal{B}$.

Lösning: Låt $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Då existerar slutna delmängder $F_1, F_2, \ldots$ av X så att

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Eftersom $\mathcal{B}$ innehåller alla slutna delmängder av X, så gäller $F_i \in \mathcal{B}$ för alla $i \in \mathbb{N}$. Då gäller också att

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{B},$$

eftersom $\mathcal{B}$ är en σ-algebra. Således gäller $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{B}$.

Härnäst, låt $B \in \mathcal{G}_\delta$. Då existerar öppna delmängder $G_1, G_2, \ldots$ av X så att

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i.$$

Då är G_i^c sluten för alla $i \in \mathbb{N}$ och därmed gäller $G_i^c \in \mathcal{B}$ för alla $i \in \mathbb{N}$. Därmed har vi att

$$G_i = (G_i^c)^c \in \mathcal{B}.$$

På basis av Anmärkning 2.45. (2) så gäller då också att

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \in \mathcal{B}.$$

Således gäller $\mathcal{G}_\delta \subset \mathcal{B}$

Uppgift 4. *Låt X och Y vara topologiska rum och låt $f : X \to Y$ vara kontinuerlig. Bevisa följande påståenden eller ge motexempel.*

$$\begin{aligned} &(a) \quad B \subset Y, B \in \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_\sigma, \\ &(b) \quad B \subset Y, B \in \mathcal{G}_\delta \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{G}_\delta, \\ &(c) \quad A \subset X \text{ sluten } \Rightarrow f(A) \in \mathcal{F}_\sigma. \end{aligned}$$

Lösning: Om begreppet topologiskt rum inte är bekant så kan man lösa uppgiften för metriska rum X och Y.

$\boxed{\text{Topologiska rum :}}$ Låt X vara en mängd. Familjen $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ är en *topologi* för X om följande villkor satisfieras:
1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. Om $A_j \in \tau$ för alla $j \in I$ där I är en indexmängd, så gäller $\bigcup_{j \in I} A_j \in \tau$.
3. Om $A_1, A_2, \dots A_k \in \tau$, så gäller $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \tau$.

Mängderna i τ kallas för *öppna* mängder. Komplementet av en öppen mängd kallas för en *sluten* mängd. En funktion $f : X \to Y$, där X och Y är topologiska rum, säges vara kontinuerlig om $f^{-1}(A)$ är en öppen delmängd av X för varje öppen delmängd A av Y. Eftersom $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$ för varje $B \subset Y$, så gäller också att $f^{-1}(A)$ är sluten i X för varje sluten delmängd A av Y.

(a) Påståendet är sant. Antag att $B \subset Y$, $B \in \mathcal{F}_\sigma$. Då existerar slutna delmängder $F_1, F_2, \dots$ av Y så att $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. Eftersom f är kontinuerlig, så är $f^{-1}(F_i)$ sluten för alla $i \in \mathbb{N}$ och därmed är

$$f^{-1}(B) = f^{-1}\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(F_i) \in \mathcal{F}_\sigma.$$

(b) Påståendet är sant. Antag att $B \subset Y$, $B \in \mathcal{G}_\delta$. Då existerar öppna delmängder $G_1, G_2, \dots$ av Y så att $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$. Eftersom f är kontinuerlig, så är $f^{-1}(G_i)$ öppen för alla $i \in \mathbb{N}$ och därmed är

$$f^{-1}(B) = f^{-1}\big(\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i\big) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(G_i) \in \mathcal{G}_\delta.$$

(c) Påståendet är falskt:

Exempel 1: Låt $(\mathbb{R}, \tau)$ beteckna mängden $\mathbb{R}$ utrustad med den diskreta topologin där varje delmängd $A \subset \mathbb{R}$ är öppen i $(\mathbb{R}, \tau)$, d.v.s. $\tau = \mathcal{P}(X)$. Låt $(\mathbb{R}, d)$ beteckna mängden $\mathbb{R}$ utrustad med den vanliga euklidiska topologin där en delmängd $A \subset \mathbb{R}$ är öppen i $(\mathbb{R}, d)$ om och endast om för varje $x \in A$ existerar ett tal $r > 0$ så att $y \in A$ alltid då $|x - y| < r$. Då är

$$id : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, d), \quad x \mapsto x$$

kontinuerlig, ty varje öppen delmängd i $(\mathbb{R}, d)$ är öppen i $(\mathbb{R}, \tau)$. Ta nu vilken som helst delmängd $A \subset \mathbb{R}$ som inte tillhör F_σ i $(\mathbb{R}, d)$. Den är givetvis sluten i $(\mathbb{R}, \tau)$ (alla mängder är det) men $id(A) = A \notin F_\sigma$. Eftersom $F_\sigma \overset{\text{uppg.3}}{\subset} \mathcal{B} \subset Leb(\mathbb{R})$ så är t.ex. Vitalis mängd i sats 2.69. inte i F_σ. Ett "mindre exotiskt"exempel är $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ som inte heller tillhör F_σ. Detta följer ur Baires kategorisats.

Exempel 2: Låt $X = Y = \{0, 1\}$ där X har topologin $\tau_1 = \mathcal{P}(X)$ och Y topologin $\tau_2 = \{\emptyset, Y\}$. Då är $F_\sigma = \{\emptyset, Y\}$ i Y och $id : X \to Y$ kontinuerlig. Mängden $\{0\}$ är sluten i X men $id(\{0\}) = \{0\} \notin F_\sigma$ i Y.

Intressant nog så är påståendet sant om $X = Y = \mathbb{R}$ med den vanliga euklidiska topologin (eller mera allmänt om X är ett σ-kompakt rum och Y ett

Hausdorffrum): Låt A vara en sluten mängd i $\mathbb{R}$. Då är $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap [-i, i])$. Mängderna $A \cap [-i, i]$ är kompakta och därmed är mängderna $f(A \cap [-i, i])$ kompakta och således slutna. Alltså gäller

$$f(A) = f(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap [-i, i]) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A \cap [-i, i]) \in F_{\sigma}.$$

Uppgift 5. *Låt $(X, \mathcal{M})$ vara ett mätbart rum och låt $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$ vara mätbar för alla $n \in \mathbb{N}$. Visa, att mängden av alla $x \in X$ för vilka $f_n(x)$ konvergerar då $n \to \infty$ är mätbar.*

Lösning: Låt $A = \{x \in X : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$, $g = \liminf f_n$ och $h = \limsup f_n$. Enligt Sats 3.21 så gäller $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$ och således är

$$A = \{x \in X : g(x) = h(x)\}.$$

Låt $B = \{x \in X : g(x) < h(x)\}$ och $C = \{x \in X : g(x) > h(x)\}$ och därmed gäller $A = (B \cup C)^c$. Vi visar att
$\boxed{B \text{ är mätbart :}}$ För $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ gäller $a < b$ om och endast om $a < q < b$ för något $q \in \mathbb{Q}$. Därmed

$$B = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in X : g(x) < q\} \cap \{x \in X : h(x) > q\}$$

Mängderna $\{x \in X : g(x) < q\}$ och $\{x \in X : h(x) > q\}$ är mätbara (Sats 3.12) och således är deras snitt mätbart och därmed är även B som en uppräknelig union av mätbara mängder mätbar. Analogt är C mätbart och därmed är $A = (B \cup C)^c$ mätbart.

$\boxed{\text{Anmärkning :}}$ I Satserna som hänvisades till i lösningen är det mätbara rommet $(\mathbb{R}, Leb\mathbb{R})$ men dessa satser med exakt samma bevis gäller även för allmänna mätbara rum.