Insitutionen för matemtatik och statistik
Mått- och integrationsteori
Övning 2
Förslag till Lösningar

Jeremias Berg

31 januari 2015

Uppgift. 1
Är följande påståenden sanna eller falska? Motivera dina svar.

(a) Om $A \subset \mathbb{R}^n$ och $m^*(A) > 0$, så innehåller A en icke-tom öppen mängd.

(b) Om $A \subset \mathbb{R}^n$ och $m^*(A) < \infty$, så är A en begränsad mängd.

Lösning:
Båda påståenden är falska, motexempel existerar i $n = 1$ fallet.
(a) Låt $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Då är:

$$1 = m^*([0, 1]) = m^*(A \cup ([0, 1] \cap \mathbb{Q})) \leq m^*(A) + m^*(([0, 1] \cap \mathbb{Q}))$$

Eftersom $m^*(([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0$ (mängden är uppräcknerlig) så gäller $m^*(A) \geq 1$. Å andra sidan existerar det rationella tal i vilket som helst delinterval av $[0, 1]$, vilket betyder att A inte innehåller några (icke-tomma) öppna mängder, vilka i $n = 1$ är de öppna intervallen på tallinjen.

(b) Mängden $\mathbb{Q}$ fungerar som motexempel. Som bevisas i kompendiet är $m^*(\mathbb{Q}) = 0$ men för varje $R > 0$ existerar det rationella tal $q > R$, så mängden $\mathbb{Q}$ är inte begränsad.

Uppgift. 2
En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ säges vara *Lipschitz-kontinuerlig* om det existerar en sådan konstant $L > 0$ att $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$. Visa, att om f är Lipschitz-kontinuerlig och $A \subset \mathbb{R}$ är en mätbar mängd med $m(A) = 0$, så är också bildmängden $f(A)$ mätbar och $m(f(A)) = 0$.

Lösning:
Enligt sats 2.23 räcker det att visa att $m^*(f(A)) = 0$. Låt $\epsilon > 0$ vara godt. Vi konstruerar näst en Lebesgue-övertäckning $\mathcal{F}'$ till $f(A)$ för vilken $S(\mathcal{F}') < \epsilon$. Från antagande $m(A) = 0$ följer att det existerar en övertäckning $\mathcal{F}$ till A där

$\mathcal{F} = \{I_1, \ldots\}$ och $I_k = (a_k, b_k)$ för vilken

$$S(\mathcal{F}) < \frac{\epsilon}{L}.$$

Konstruera nu $\mathcal{F}' = \{I_i', \ldots\}$ genom att låta $I_k' = (\inf f(I_k), \sup f(I_k))$. Då är $\mathcal{F}'$ en Lebesgue övertäckning av $f(A)$. Nämligen om $x \in A$ så är $x \in I_n$ för något n. Därmed är $\inf f(I_n) \leq f(x) \leq \sup f(I_n)$.

Nu gäller för varje $x, y \in I_n$ att $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ vilket betyder att

$$l(I_n') = |\sup f(I_n) - \inf f(I_n)| \leq L|\sup(I_n) - \inf(I_n)| = L|b_n - a_n| = L \cdot l(I_n)$$

och därmed är $S(\mathcal{F}') \leq L \cdot S(\mathcal{F}) < L \cdot \frac{\epsilon}{L} = \epsilon$ Från vilket $m^*(f(A)) = 0$ följer genom att låta $\epsilon \to 0$.

Notera att den kanske mer intuitiva konstruktionen $I_k' = (f(a_k), f(b_k))$ inte duger för att garantera att $\mathcal{F}'$ är en övertäckning av $f(A)$ eller ens att $\mathcal{F}'$ är väl definierat. Låt t.ex. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara sådan att $f(x) = -x$. Då är $|f(x) - f(y)] = |-x-(-y)| = |y - x| = 1 \cdot |x - y|$ så f är Lipschitz-kontinuerlig. Dock om $I = (a, b)$ få är $I' = (f(a), f(b))$ inte ett intervall.

Uppgift. 3
Bevisa Lindelöfs sats (Sats 2.41 i kompendiet).

Lösning:
Vi börjar med att nämna satsen

Lidelöfs sats Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara godtycklig och låt:

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \supset A$$

vara en övertäckning bestående av öppna mängder $V_\alpha \in \mathbb{R}^n$ för varje $\alpha \in \mathcal{A}$. Då existerar en uppräcknerlig delövertäckning:

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_{\alpha_j} \supset A$$

Bevis: Beviset är väldigt lika uppgift 3 från övning 1. Vi studerar mängden $A_\mathbb{Q} = A \cap \mathbb{Q}^n$. För varje $x \in A_\mathbb{Q}$ låt $\mathcal{A}_x = \cup_{r \in \mathbb{Q}} \mathcal{A}_{xr}$

$$\mathcal{A}_{xr} = \begin{cases} \{\alpha\} \text{ om det existerar } B(x, r) \subset V_\alpha \\ \emptyset \text{ annars} \end{cases}$$

Observera alltså att för varje rationell radie väljer vi högst ett index α. Notera att varje $x \in A_\mathbb{Q}$ innehålls i någon V_α och öppenheten av V_α garanterar existensen av åtminstone ett $r > 0$ (vilket vid behov genom minskning kan antas vara rationellt) för vilket $B(x, r) \subset V_\alpha$, dvs $\mathcal{A}_x \neq \emptyset$ för alla $x \in A_\mathbb{Q}$. Då det existerar uppräcknerligt många element i $A_\mathbb{Q}$ och varje $\mathcal{A}_x$ betår av uppräcknerligt många element är samlingen:

$$\mathcal{A}' = \bigcup_{x \in A_\mathbb{Q}} \mathcal{A}_x$$

uppräcknerlig.

Det som är kvar är att visa att

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}'} V_\alpha \supset A.$$

Låt alltså $x \in A$ vara g.t. Om $x \in A_\mathbb{Q}$ är $x \in V_\alpha$ för något $V_\alpha \in \mathcal{A}_x$ och därmed är saken klar. Antag alltså $x \in A \setminus A_\mathbb{Q}$. Då är $x \in V_\alpha$ för något $\alpha \in \mathcal{A}$. Eftersom V_α är öppen existerar det ett $r > 0$ (som kan antas vara rationellt) för vilket $B(x,r) \subset V_\alpha$. Då är $\frac{r}{2}$ rationellt och tätheten av $\mathbb{Q}^n$ betyder att det existerar ett $y \in A_\mathbb{Q}$ så att $y \in B(x, \frac{r}{2})$. Nu är $x \in B(y, \frac{r}{2})$. och eftersom

$$B(y, \frac{r}{2}) \subset B(x,r) \subset V_\alpha$$

(där första inklusionen kan motiveras med triangelolikheten så som i upg. 3 övning 1) så existerar det något $\beta \in \mathcal{A}_y$ för vilket $x \in V_\beta$. Då gäller även att

$$x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}'} V_\alpha$$

vilket skulle visas.

Uppgift. 4
Låt mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ ha följande egenskap: För varje $x \in A$ finns det ett öppet klot $B(x, r_x)$ för vilket $m^*(A \cap B(x, r_x)) = 0$. Visa, att $m^*(A) = 0$.

Lösning:
Vi märker först att:

$$\bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \supset A.$$

Därmed existerar det enligt Lindelöfs sats ett uppräcknerligt deltäcke:

$$\bigcup_{x_i \in A} B(x_i, r_{x_i}) \supset A.$$

Nu är:

$$m^*(A) = m^*(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A \cap B(x_i, r_{x_i}))) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (A \cap B(x_i, r_{x_i}))) = 0.$$

Så $m^*(A) = 0$ eftersom $m^*(B) \geq 0$ för alla $B \subset \mathbb{R}^n$.

Uppgift. 5
Visa, att mängden

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q},\, y \in \mathbb{R}\big\}$$

är en mätbar delmängd av $\mathbb{R}^2$ och att $m(A) = 0$.

Lösning:
Så som tidigare så räcker det att visa $m^*(A) = 0$. Vi märker först att:

$$A = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Så

$$m^*(A) = m^*\left(\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}\}\right) \leq \sum_{x\in\mathbb{Q}} m^*\left(\{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}\}\right)$$

Det räcker alltså att visa $m^*(\{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}\}) = 0$ för alla $x \in \mathbb{Q}$.

Låt alltså $x \in \mathbb{Q}$ och $\epsilon > 0$ vara g.t.

För varje $y_j \in \mathbb{Q}$ låt

$$I_j = (x - \frac{\epsilon}{2^{j+1}}, x + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}) \times (y_j - \frac{1}{2}, y_j + \frac{1}{2}).$$

Då är

$$l(I_j) = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2^{j+1}} \cdot 1 = \frac{\epsilon}{2^j}$$

och

$$\{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j.$$

Därmed gäller det att:

$$m^*\left(\{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}\}\right) \leq m^*\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{\epsilon}{2^j} = \epsilon$$

och genom att låta $\epsilon \to 0$ får vi att $m^*\left(\{(x,y) \mid y \in \mathbb{R}\}\right) = 0$, vilket bevisar uppgiften.

Uppgift. 6
Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara en godtycklig mängd.

(a) Visa att det mot varje $\varepsilon > 0$ svarar en öppen mängd $B \subset \mathbb{R}^n$ för vilken $A \subset B$ och

$$m^*(B) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

(b) Visa att det finns öppna mängder $B_k \subset \mathbb{R}^n$ som uppfyller villkoren

$$A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \quad \text{och} \quad m^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = m^*(A).$$

Lösning:
(a) Om $m^*(A) = \infty$ så är $\mathbb{R}^n$ en öppen mängd för vilken $A \subset \mathbb{R}^n$ och $\infty = m^*(\mathbb{R}) \leq m^*(A) + \epsilon$ för alla ϵ.
Annars låt $\epsilon > 0$, då existerar det en Lebesgue övertäckning $\mathcal{F} = \{I_1, \ldots\}$ till A för vilken $S(\mathcal{F}) \leq m^*(A) + \epsilon$. Eftersom varje I_n är öppen är mängden:

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset A$$

öppen. Dessutom är:

$$m^*(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) = S(\mathcal{F}) \leq m^*(A) + \epsilon$$

(b) Åter igen, om $m^*(A) = \infty$ så väljer vi $B_k = \mathbb{R}^n$ för alla k.
Annars så existerar det baserat på del (a) för varje $n \in \mathbb{N}$ en öppen mängd B_n för vilken $A \subset B_n$ och

$$m^*(B_n) \leq m^*(A) + \frac{1}{n}$$

Då är

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \supset A$$

från vilket det följer att $m^*(A) \leq m^*\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$. Å andra sidan är $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \subset B_{n+1}$ för alla n från vilket vi kan härleda olikheten:

$$m^*\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq m^*(B_{n+1}) \leq m^*(A) + \frac{1}{n+1} < m^*(A) + \frac{1}{n}.$$

Från detta följer att $m^*(A) \geq m^*\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$. Nämligen om $m^*\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) > m^*(A)$ så existerar något n' för vilket: $m^*\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) > m^*(A) + \frac{1}{n'}$, en motsägelse.