Insitutionen för matemtatik och statistik
Mått- och integrationsteori
Övning 1
Förslag till Lösningar

Jeremias Berg
Henrik Wirzenius

26 januari 2015

Uppgift 1. *(a) Antag att* $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. *Visa att*

$$\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A.$$

(b) Låt $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ *och* $-A = \{-x : x \in A\}$. *Visa att*

$$\inf A = -\sup(-A).$$

(c) Bestäm $\inf([0, \infty) \setminus \mathbb{Q})$.

Lösning:
(a) Vi visar först att $\inf B \leq \sup B$. Från antagandet $\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}$ följer det att det existerar något $b \in B$ och därmed att:

$$\inf B \leq b \leq \sup B \Rightarrow \inf B \leq \sup B$$

Notera specifikt att från $-\infty < b < \infty$ följer även att $\inf B < \infty$ och $\sup B > -\infty$

Nu visar vi att $\inf A \leq \inf B$:
Antag först att $\inf B = -\infty$.
Låt $-\infty < M < 0$ vara godtyckligt. Från antagande följer att det existerar $b \in B$ för vilket $b < M$ (annars är M en undre gräns för B och $\inf B \geq M$). Eftersom $B \subset A$ är $b \in A$ och därmed är M inte heller en undre gräns för A. Då M var godtyckligt kan vi dra slutsatsen $\inf A = -\infty$ och $\inf A \leq \inf B$, vilket skulle visas.
Antag nu att $\inf B > -\infty$.
Om $\inf A = -\infty$ är saken klar. Antag alltså $\inf A > -\infty$. Då är $\inf A$ en undre gräns för mängden A och därmed även för mängden B. Från detta följer $\inf A \leq \inf B$.

Beviset för $\sup B \leq \sup A$ är nästan likadant som för $\inf A \leq \inf B$.

(b) Antag att $\sup(-A) > -\inf A$. Då existerar ett element $y \in -A$ för vilket $y > -\inf A$. Eftersom $y = -x$ för något $x \in A$ så gäller $-x > -\inf A$ och därmed $x < \inf A$. Detta är en motsägelse och således är $\sup(-A) \leq -\inf A$ och därmed $\inf A \leq -\sup(-A)$.

Antag härnäst att $\inf A < -\sup(-A)$. Då existerar $x \in A$ för vilket $x < -\sup(-A)$ och således gäller $-x > \sup(-A)$. Detta är igen en motsägelse, eftersom $-x \in -A$, och således är $\inf A \geq -\sup(-A)$. Alltså gäller $\inf A = -\sup(-A)$.

(c) Vi betecknar $A = \inf([0, \infty) \setminus \mathbb{Q})$ och visar att $\inf A = 0$.
i) Efterson $x \geq 0$ för alla $x \in A$ måste $\inf A \geq 0$, nämligen om $\inf A < 0$ så är $\dfrac{\inf A}{2}$ en större undre gräns för mängden A.
ii) För alla $\epsilon > 0$ då existerar det ett irrationellt tal $0 < x < \epsilon$. Då är $x \in A$ så $\inf A < \epsilon$. Genom att låta ϵ gå mot 0 får vi att $\inf A \leq 0$ och genom att kombinera med punkt i får vi att $\inf A = 0$

Uppgift 2. *Låt X och Y vara två godtyckliga mängder och låt $f : X \to Y$ vara en avbildning, $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}(X)$ och $A \subset X$.*

(a) Visa att

$$f\Big(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha\Big) \subset \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} f(V_\alpha)$$

och ge ett exempel där inklusionen är äkta.

(b) Antag ytterligare att f är en injektion. Visa att man då har

$$f\Big(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} f(V_\alpha)$$

och

$$f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A).$$

Lösning:
(a) Antag att $y \in f\Big(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha\Big)$. Då är $y = f(x)$ för något $x \in \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha$. Alltså är $x \in V_\alpha$ för varje $\alpha \in \mathcal{A}$. Således är $y = f(x) \in f(V_\alpha)$ för varje $\alpha \in \mathcal{A}$, vilket betyder att $y \in \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} f(V_\alpha)$. Därmed är inklusionen bevisad.

Vi ger ett exempel där inklusionen är äkta. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $V_1 = [-1, 0]$ och $V_2 = [0, 1]$. Då är

$$f(V_1 \cap V_2) = \{0\} \subsetneq [0, 1] = f(V_1) \cap f(V_2).$$

(b) På basis av (a) så räcker det att visa att inklusionen

$$\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} f(V_\alpha) \subset f\Big(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha\Big)$$

gäller. Antag alltså att $y \in \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} f(V_\alpha)$. Då existerar det för varje $\alpha \in \mathcal{A}$ ett element $x_\alpha \in V_\alpha$ för vilket $y = f(x_\alpha)$. Vi väljer ett godtyckligt index $\alpha \in \mathcal{A}$ och betecknar $x = x_\alpha$. Eftersom f är en injektion så är $x = x_\beta$ för varje $\beta \in \mathcal{A}$.

Således är $x \in \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha$ och därav följer det att $y = f(x) \in f\Big(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha\Big)$, vilket bevisar inklusionen.

För att visa inklusionen $f(X\setminus A) \subset Y\setminus f(A)$, noterar vi att $f(X\setminus A)\cap f(A) = \emptyset$ eftersom f är en injektion. Således är $f(X \setminus A) \subset f(A)^c = Y \setminus f(A)$.

Uppgift 3. *Låt I vara en (index)mängd och antag att $a_i > 0$ för alla $i \in I$. Visa att I är uppräknelig om $\sum_{i\in I} a_i < \infty$.*

Lösning:
Vi betecknar $S = \sum_{i\in I} a_i$, nu är alltså $S < \infty$. Låt $I_n = \{i \in I : a_i \geq 1/n\}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Då varje a_i är större än 0 så existerar det för alla i ett $n_i \in \mathbb{N}$ så att $a_i \geq 1/n_i$. Därmed gäller det $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Enligt Sats 1.16. så räcker det att visa att varje I_n är uppräknelig. Vi visar att $|I_n| \leq n \cdot S$ för alla n, vilket betyder att varje I_n är ändlig.

Vi gör ett motantagande, $|I_n| > n \cdot S$ för något n. Då existerar det en ändlig delmängd $J \subset I_n$ för vilken $|J| > nS$. Således gäller

$$S \geq \sum_{i\in J} a_i \geq |J| \cdot 1/n > nS \cdot 1/n = S$$

vilket är en motsägelse.

Uppgift 4. *Låt $V \subset \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd. Visa att det finns en sådan uppräknelig familj $\{B_i\}$ av öppna klot att $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.*

Lösning:
Ett enkelt sätt att skriva V som en union av öppna kulor skulle vara att notera att V:s öppenhet garanterar för alla $x \in V$ ett $r_x > 0$ så att $B(x, r_x) \subset V$. Därmed är:

$$V = \bigcup_{x\in V} B(x, r_x).$$

Denna konstruktion leder dock till en ouppräcknerlig familj av kulor. För att hålla oss till uppräcknerliga familjer måste vi begränsa oss till att undersöka sådana vektorer $x \in V$ vars alla koordinater är rationella tal samt endast rationella radier r. Som en bisats kan nämnas att denna konstruktion tillsammans med lindelöfs sats (2.14 i kompendiet) skulle räcka till att lösa uppgiften. Näst löser vi uppgiften utan att hänvisa till lindelöf.

I lösningen behövs 2 hjälpsatser:
Hjälpsats 1. Om $X_1, \ldots, X_n$, där $n \in \mathbb{N}$, är uppräkneliga mängder, så är $X_1 \times \cdots \times X_n$ uppräknelig.
Hjälpsats 2. $\mathbb{Q}^n$ är tätt i $\mathbb{R}^n$ för varje $n \in \mathbb{N}$, d.v.s. för varje klot $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ så är $\mathbb{Q}^n \cap B(x, r) \neq \emptyset$.
Antag att hjälpsatserna gäller (vi bevisar dem till sist). Vi betecknar $\mathcal{B} = \{B(q, r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_+\}$, där $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$. Nu eftersom $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_+$ är uppräcknerlig enligt följd 1.17 i kompendiet samt hjälpsats 1 och funktionen

$$f : \mathcal{B} \to \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_+ \quad f(B(q, r)) = (q, r)$$

är bijektiv är $\mathcal{B}$ uppräcknerlig. Låt ännu $\mathcal{B}_v = \{B(q, r) \subset V : B(q, r) \in \mathcal{B}\}$. Då är $\mathcal{B}_v \subset \mathcal{B}$ och därmed uppräcknerlig.

Det som blir kvar att visa är att:

$$V = \bigcup_{B(q,r)\in\mathcal{B}_v} B(q,r).$$

Eftersom $B(x,r) \subset V$ för varje $B(x,r) \in \mathcal{B}_v$ är inklusionen

$$\bigcup_{B(q,r)\in\mathcal{B}_v} B(q,r) \subset V$$

klar. Vi visar nu den andra inklusionen. Låt $x \in V$ vara godtycklig. Eftersom V är öppen, existerar det ett $r > 0$ så att $B(x,r) \subset V$. Vi kan anta $r \in \mathbb{Q}$, annars existerar det ett rationellt $0 < r' < r$ för vilket beviset också fungerar. Enligt hjälpsats 2 så existerar det ett $q \in \mathbb{Q}^n$ så att $q \in B(x, \frac{r}{2})$. Då är $|x - q| < \frac{r}{2}$ vilket betyder att $x \in B(q, \frac{r}{2})$. Notera att $B(q, \frac{r}{2}) \in \mathcal{B}$.
För att visa att $B(q, \frac{r}{2} \in \mathcal{B}_v)$ observerar vi att för alla $y \in B(q, \frac{r}{2})$ gäller det enligt triangelolikheten att:

$$|y - x| \leq |y - q| + |q - x| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Vilket i sin tur betyder att $y \in B(x,r)$. Därmed är $B(q, \frac{r}{2}) \subset B(x,r) \subset V$ så $B(q, \frac{r}{2}) \in \mathcal{B}_v$. För att sammanfatta så började vi alltså med ett $x \in V$ och hittade en kula $B(q, \frac{r}{2}) \in \mathcal{B}_v$ som x tillhör till. Därmed är:

$$V \subset \bigcup_{B(q,r)\in\mathcal{B}_v} B(q,r)$$

och beviset för uppgiften färdigt.

Vi måste ännu visa hjälpsatserna som används:
Bevis för hjälpsats 1: Vi bevisar påståendet med hjälp av induktion. Fallet $n = 1$ är uppenbart sant. Antag härnäst att påståendet gäller för något $n \in \mathbb{N}$ och låt $X_1, \dots, X_{n+1}$ vara uppräkneliga mängder. Enligt induktionsantagandet så är $X_1 \times \cdots \times X_n$ uppräknelig och därmed är också mängden $X_1 \times \cdots \times X_n \times \{x\}$ uppräknelig för varje $x \in X_{n+1}$. Således är också

$$X_1 \times \cdots \times X_{n+1} = \bigcup_{x\in X_{n+1}} X_1 \times \cdots \times X_n \times \{x\}$$

uppräknelig enligt Sats 1.16. $\square$

Bevis för hjälpsats 2: Låt $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ och $r > 0$. Välj $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$ för vilka $|x_i - q_i| < r/\sqrt{n}$ för alla $i = 1, \dots, n$ och låt $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$. Då gäller

$$|x - q|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - q_i)^2 < nr^2/n = r^2$$

och således är $|x-q|<r$, vilket betyder att $q \in B(x,r)$. $\square$

Anmärkning: För de som gått Topologi II betyder ju detta att $\mathcal{B}$ är en uppräknelig bas för topologin i $\mathbb{R}^n$, d.v.s att $\mathbb{R}^n$ är ett sekundärt uppräkneligt rum. Samma bevis fungerar för att visa att varje separabelt metriskt rum är sekundärt uppräkneligt.

Uppgift 5. *Låt $A \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ och $k>0$. Definiera*

$$A+y = \{x+y : x \in A\} \text{ och } kA = \{kx : x \in A\}.$$

Visa att

$$m_n^*(A+y) = m_n^*(A) \text{ och } m_n^*(kA) = k^n m_n^*(A).$$

Lösning:
Låt $\varepsilon > 0$ och låt $\{I_1, I_2, \ldots\}$ vara en Lebesgue-övertäckning till A för vilken $\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) \leq m_n^*(A) + \varepsilon$. Då är $\{I_1+y, I_2+y, \ldots\}$ en Lebesgue-övertäckning till $A+y$. Uppenbarligen är $l(I_i+y) = l(I_i)$ för varje $i \in \mathbb{N}$, och således

$$m_n^*(A+y) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i+y) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) \leq m_n^*(A) + \varepsilon.$$

Därav följer att $m_n^*(A+y) \leq m_n^*(A)$.
Låt nu $B = A+y$ och $x=-y$. Då är $B+x=A$ och således har vi på basis av resonemanget ovan att

$$m_n^*(A) = m_n^*(B+x) \leq m_n^*(B) = m_n^*(A+y).$$

Således är $m_n^*(A+y) = m_n^*(A)$.

På samma sätt är $\{kI_1, kI_2, \ldots\}$ en Lebesgue-övertäckning till kA och uppenbarligen är $l(kI_i) = k^n l(I_i)$ för varje $i \in \mathbb{N}$. Således

$$m_n^*(kA) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(kI_i) = k^n \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) \leq k^n m_n^*(A) + k^n \varepsilon.$$

Därav följer att $m_n^*(kA) \leq k^n m_n^*(A)$. Låt $B = kA$. Då är $\frac{1}{k}B = A$ och således har vi på basis av resonemanget ovan att

$$m_n^*(A) = m_n^*(\frac{1}{k}B) \leq (1/k)^n m_n^*(B) = (1/k)^n m_n^*(kA).$$

Därmed är $m_n^*(kA) = k^n m_n^*(A)$.

Uppgift 6. *Låt $A \subset [1,3]$. Visa att*

$$m^*\big(\{x^2 : x \in A\}\big) \leq 6m^*(A).$$

Kan man ersätta konstanten 6 med ett mindre tal?

Lösning: Vi noterar först att $m^*(A) \leq 2 < \infty$. Låt $0 < \varepsilon < 1$ och låt $\{I_1, I_2, \ldots\}$, där $I_n = (a_n, b_n)$ för varje $n \in \mathbb{N}$, vara en Lebesgue-övertäckning till A för vilken $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(A) + \varepsilon$. Om $I_n \cap A = \emptyset$ för något $n \in \mathbb{N}$, så är $\mathcal{F} := \{I_1, I_2, \ldots\} \setminus \{I_n\}$ uppenbart också en Lebesgue-övertäckning till A för vilken $S(\mathcal{F}) < m^*(A) + \varepsilon$. Således kan vi anta att $a_n \in [1 - \varepsilon, 3)$ och $b_n \in (1, 3 + \varepsilon]$ för varje $n \in \mathbb{N}$. Eftersom $a_n \leq x \leq b_n$ implicerar $a_n^2 \leq x^2 \leq b_n^2$, så är $\{J_1, J_2, \ldots\}$, där $J_n = (a_n^2, b_n^2)$ för varje $n \in \mathbb{N}$, en Lebesgue-övertäckning till $\{x^2 : x \in A\}$. Vi har

$$\ell(J_n) = b_n^2 - a_n^2 = (b_n + a_n)(b_n - a_n) \leq (6 + \varepsilon)\ell(I_n),$$

och således

$$\begin{aligned} m^*\big(\{x^2 : x \in A\}\big) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leq (6 + \varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < (6 + \varepsilon)(m^*(A) + \varepsilon) \\ &= 6m^*(A) + \varepsilon(m^*(A) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Därav följer att $m^*\big(\{x^2 : x \in A\}\big) \leq 6m^*(A)$.

Vi visar härnäst att konstanten 6 ej kan ersättas med ett mindre tal. Låt $A = [3 - \varepsilon/2, 3] \subset [1, 3]$. Då är $\{x^2 : x \in A\} = [(3 - \varepsilon/2)^2, 9]$. Eftersom $m^*(A) = 3 - 3 + \varepsilon/2 = \varepsilon/2$ och $m^*\big(\{x^2 : x \in A\}\big) = 9 - (3 - \varepsilon/2)^2 = 3\varepsilon - \varepsilon^2/4 = (6 - \varepsilon) \cdot \varepsilon/2 + \varepsilon^2/4$, så är

$$m^*\big(\{x^2 : x \in A\}\big) = (6 - \varepsilon) \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} > (6 - \varepsilon) \cdot \frac{\varepsilon}{2} = (6 - \varepsilon)m^*(A).$$

Anmärkning: Här använde vi det faktum att $m^*(I) = \ell(I)$ för ett slutet intervall $I \subset \mathbb{R}$.