

1. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right)^n dx.$$

2. Låt $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (dvs. f mätbar och $\int_{\mathbb{R}^n} |f| dm_n < \infty$). Visa att det mot varje $\varepsilon > 0$ svarar en Lebesguemätbar mängd $A \subset \mathbb{R}^n$ med $m_n(A) < \infty$ och

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus A} |f| < \varepsilon.$$

3. Låt (X, \mathcal{M}, μ) vara ett måttrum med $\mu(X) = 1$. Definiera för alla mätbara funktioner $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$

$$d(f, g) = \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu.$$

(a) Visa att d är en metrik.

(b) Visa att $d(f_n, f) \rightarrow 0$ om och endast om f_n konvergerar mot f med avseende på måttet μ (konvergens med avseende på ett mått definierades i övning 5).

4. Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara integrerbar med avseende på Lebesguemåttet och definiera funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genom

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Visa att g är kontinuerlig.

5. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-nx^2} dx.$$

6. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^{n-1}} dx.$$

7. Låt $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vara mätbar och definiera funktionerna $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ genom

$$g_n(x) = \frac{\cos(f(x))}{1 + n(f(x))^2}, \quad x \in [0, 1].$$

Visa att funktionerna g_n är integrerbara över intervallet $[0, 1]$ och att gränsvärdet

$$a_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx$$

existerar. Vilka värden antar a_f då f genomlöper alla mätbara funktioner $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.