

1. Definiera för $x \in \mathbb{R}$ och $t > 0$

$$f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad \text{och} \quad g(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} f(t, x).$$

- (a) Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t, x) dx = 1$$

för alla $t > 0$.

- (b) Låt $s > 0$. Evaluera de dubbla integralerna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_s^{\infty} g(t, x) dt dx \quad \text{och} \quad \int_s^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t, x) dx dt.$$

- (c) Gäller Fubinis sats i detta fall?

- (d) Om inte, varför?

2. Låt (X, \mathcal{S}, μ) och $(Y, \mathcal{T}, \lambda)$ vara σ -finita måttrum. Bevisa *Cavalieris princip*: Om E och F är $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ -mätbara delmängder av $X \times Y$ och $\lambda(E_x) = \lambda(F_x)$ för nästan alla $x \in X$ så är $(\mu \times \lambda)(E) = (\mu \times \lambda)(F)$. Använd detta resultat till att bevisa att de båda mynthögarna i Figur ?? har samma volym.



Figur 1: Två mynthögar med samma volym

3. Låt m_n beteckna det Lebeguemåttet i \mathbb{R}^n och låt $f : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ vara m_1 -mätbar.
- (a) Visa att mängden $A(f) = \{(x, y) \in [0, 1] \times (0, \infty) : 0 < y < f(x)\}$ är m_2 -mätbar.

(b) Visa att

$$m_2(A(f)) = \int_0^1 f(x) dm_1(x).$$

4. Bestäm volymen av snittet av de två kropparna $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ och $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_3^2 \leq 1\}$ i \mathbb{R}^3 .
5. Bestäm Lebeguemåttet av klotet $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ i \mathbb{R}^n .