Institutionen för matematik och statistik
Mått- och integrationsteori
Övning 5
27.2.2015

**Definition** Låt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum och låt $f_n$ vara en följd av mätbara reellvärda funktioner på $X$. Följden $f_n$ säges *konvergera med avseende på måttet* $\mu$ mot den mätbara funktionen $f$ om för varje $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

1. (a) Ge ett exempel på en följd $f_n$ av funktioner definierade på $[0,1]$ som konvergerar mot 0 med avseende på Lebesguemåttet, trots att $f_n(x)$ inte konvergerar i någon punkt $x \in [0,1]$.

   (b) Visa att om $f_n$ konvergerar mot $f$ med avseende på måttet $\mu$, så har $f_n$ en delföljd $f_{n_k}$, som konvergerar mot $f$ nästan överallt.

2. Låt $X = [0,1]$ vara försett med Lebesguemåttet och betrakta funktionsföjderna $f_n$ och $g_n$ definierade genom

$$f_n(x) = nx(1-x)^n, \quad g_n(x) = nf_n(x), \quad x \in X.$$

   Kan man tillämpa

   (a) satsen om monoton konvergens,

   (b) Fatous lemma,

   (c) satsen om dominerad konvergens

   på följderna $f_n$ och $g_n$? I de fall du svarar jakande, ange den slutsats den ifrågavarande satsen ger.

3. Samma fråga som i uppgift 2, men för $X = (0, \infty)$ och

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad g_n(x) = 2n^2 e^{-n^2x^2} \quad x \in X.$$

4. Låt $(x, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum. Låt $f_n : X \to \mathbb{R}$ vara måtbara funktioner och antag att $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0$ och att $\int_X f_1 d\mu < \infty$. Visa att

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x + e^{n(x-1)}}}$$

6. Låt $(x, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum. Visa att

(a) om $f : X \to [0, \infty]$ är mätbar, $E \in \mathcal{M}$ och $\int_E f d\mu = 0$, så är $f(x) = 0$ för nästan alla $x \in E$.

(b) om $f \in L^1(\mu)$ och $\int_E f d\mu = 0$ för alla $E \in \mathcal{M}$, så är $f(x) = 0$ för nästan alla $x \in X$.

(c) om $f \in L^1(\mu)$ och

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \int_X |f| \, d\mu,$$

så finns det en sådan konstant $\alpha \in \mathbb{C}$ att $\alpha f(x) = |f(x)|$ för nästan alla $x \in X$.