Institutionen för matematik och statistik
Mått- och integrationsteori
Övning 3
6.2.2013

1. På föreläsningarna har limes superior och limes inferior av en följd $\{a_n\}$ av element i $\overline{\mathbb{R}}$ definierats så här:

$$\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = \inf_{k\geq 1}\sup_{n\geq k}\{a_n\}, \quad \liminf_{n\to\infty}\{a_n\} = \sup_{k\geq 1}\inf_{n\geq k}\{a_n\}.$$

Låt S vara mängden av all $x \in \overline{\mathbb{R}}$ för vilka det finns en delföljd $\{a_{n_k}\}$ som konvergerar mot x. Visa, att $\limsup_{n\to\infty}\{a_n\} = \sup S$ och $\liminf_{n\to\infty}\{a_n\} = \inf S$.

2. Låt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum. Visa, att om $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{M}$ uppfyller villkoret $\mu(E_i \cap E_j) = 0$ då $i \neq j$, så gäller

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i).$$

3. Låt X vara ett topologiskt rum och betecna σ-algebran av alla Borelmängder $\mathcal{B}$. Definiera $\mathcal{F}_\sigma, \mathcal{G}_\delta \in \mathcal{P}(X)$ på följande sätt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\sigma &= \left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i : F_i \subset X \text{ är sluten för alla } i\right\},\\ \mathcal{G}_\delta &= \left\{\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i : G_i \subset X \text{ är öppen för alla } i\right\}.\end{aligned}$$

Visa att $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{B}$ och $\mathcal{G}_\delta \subset \mathcal{B}$.

4. Låt X och Y vara topologiska rum och låt $f : X \to Y$ vara kontinuerlig. Bevisa följande påståenden eller ge motexempel.

   (a) $B \subset Y,\ B \in \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_\sigma$,

   (b) $B \subset Y,\ B \in \mathcal{G}_\delta \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{G}_\delta$,

   (c) $A \subset X$ sluten $\Rightarrow f(A) \in \mathcal{F}_\sigma$.

5. Låt $(X, \mathcal{M})$ vara ett mätbart rum och låt $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ vara mätbar för alla $n \in \mathbb{N}$. Visa, att mängden av alla $x \in X$ för vilka $f_n(x)$ konvergerar då $n \to \infty$ är mätbar.