Institutionen för matematik och statistik
Mått- och integrationsteori
Övning 2
30.1.2015

1. Är följande påståenden sanna eller falska? Motivera dina svar.

   (a) Om $A \subset \mathbb{R}^n$ och $m^*(A) > 0$, så innehåller A en icke-tom öppen mängd.

   (b) Om $A \subset \mathbb{R}^n$ och $m^*(A) < \infty$, så är A en begränsad mängd.

2. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ säges vara *Lipschitz-kontinuerlig* om det existerar en sådan konstant $L > 0$ att $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$. Visa, att om f är Lipschitz-kontinuerlig och $A \subset \mathbb{R}$ är en mätbar mängd med $m(A) = 0$, så är också bildmängden $f(A)$ mätbar och $m(f(A)) = 0$.

3. Bevisa Lindelöfs sats (Sats 2.41 i kompendiet).

4. Låt mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ ha följande egenskap: För varje $x \in A$ finns det ett öppet klot $B(x, r_x)$ för vilket $m^*(A \cap B(x, r_x)) = 0$. Visa, att $m^*(A) = 0$.

5. Visa, att mängden
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R}\}$$
är en mätbar delmängd av $\mathbb{R}^2$ och att $m(A) = 0$.

6. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara en godtycklig mängd.

   (a) Visa att det mot varje $\varepsilon > 0$ svarar en öppen mängd $B \subset \mathbb{R}^n$ för vilken $A \subset B$ och
$$m^*(B) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

   (b) Visa att det finns öppna mängder $B_k \subset \mathbb{R}^n$ som uppfyller villkoren
$$A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \quad \text{och} \quad m^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = m^*(A).$$