Logiikka I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Kevät 2015
Kertaustehtäviä 2

Nämä ovat omaksi huviksenne; näistä ei saa pisteitä eikä niihin tule malleja, mutta voitte kysellä niistä esim. ohjaajaltanne viimeisellä harjoituskerralla.

1. Olkoon $L = \{E\}$ verkkojen aakkosto. Ilmaise seuraavat ominaisuudet predikaattilogiikan kaavoilla:
   a) On olemassa piste, joka on kaikkien muiden pisteiden naapuri.
   b) Jokaisella pisteellä on täsmälleen kaksi naapuria.

2. Anna malli ja tulkintafunktio, jotka toteuttavat kaavan $R(x,y) \wedge \exists x R(x, F(x))$ mutta eivät kaavaa $R(x, F(x))$.

3. Olkoon $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, R_0^{\mathcal{M}})$, missä $R_0^{\mathcal{M}} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{Z}, a - b \in \mathbb{P}\}$ ja $\mathbb{P}$ on alkulukujen joukko. Osoita Tarskin totuusmääritelmää käyttäen, että $\mathcal{M} \models \neg\exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1)$.

4. Osoita, että kaavat $\forall x A$ ja $\neg\exists x \neg A$ ovat loogisesti ekvivalentteja.

5. Osoita, että kaava $\forall x\ F(x) = x$ ei ole kaavan $\forall x\ F(F(x)) = x$ looginen seuraus.

6. Osoita, että lause $\forall x \exists y R(x,y) \vee \exists x \neg R(x,x)$ on validi.

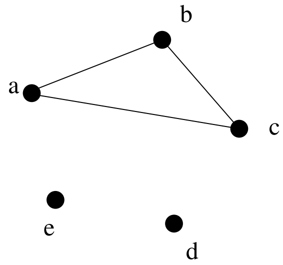
7. Mitkä termeistä
   a) $F(x)$
   b) $F(y)$
   c) $F(z)$
   d) $G(x,y)$
   e) $G(y,z)$

   ovat vapaita muuttujalle y kaavassa

$$\forall x(R_0(x,y) \vee \forall y \exists z R_0(y,z))?$$

8. Olkoon $A = R(x,y) \wedge \exists x R(x,y) \wedge \forall y P(y)$. Ovatko seuraavat kaavat määritelty? Jos kaava on määritelty, mikä se on? Ellei, miksei?
   a) $A(c/x)$
   b) $A(x/y)$
   c) $A(y/x)$
   d) $A(c/y)$

9. Olkoon $\mathcal{G}$ seuraava verkko:



Osoita, että joukot $\emptyset$, $\{a, b, c\}$ ja $\{d, e\}$ ovat määriteltäviä.

10. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla $f(x) = x^2$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että f:n kuvaaja on määriteltävä relaatio mallissa $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

11. Päättele kaava $\neg\exists x P(x) \to \neg P(c)$.

12. Päättele oletuksesta $\forall x_0 \forall x_1 (R_0(x_0, x_1) \to (P_0(x_0) \wedge \neg P_0(x_1)))$ kaavat
    a) $\forall x_0 \neg R_0(x_0, x_0)$
    b) $\neg\exists x_3 P_0(x_3) \to \neg\exists x_0 R_0(x_0, x_1)$

13. Osoita, että luonnollisella päättelyllä ei voi päätellä lausetta
$$\exists y \forall x (R(x, y) \vee R(y, x)) \to (\exists y \forall x R(x, y) \vee \exists y \forall x R(y, x)).$$

14. Voidaanko lause $\exists x \forall y R(x, y) \vee \forall x \exists y \neg R(y, x)$ päätellä luonnollisella päättelyllä? Todista vastauksesi oikeellisuus.

15. Konstruoi semanttisen puun avulla malli lauseelle $\forall x \exists y R(F(y), x) \wedge \neg\exists x R(F(x), x)$.

16. Konstruoi semanttisen puun avulla malli lauseelle $\forall x (P(x) \wedge \exists y R(x, y))$.

17. Anna semanttinen todistus lauseelle $\forall x R(F(x), x) \to \forall x \exists y R(y, x)$.

18. Olkoot $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{Z}, F_0^{\mathcal{M}_1})$ ja $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{Z}, F_0^{\mathcal{M}_2})$, missä $F_0^{\mathcal{M}_1}(n) = n+1$ ja $F_0^{\mathcal{M}_2}(n) = n - 1$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}$. Osoita, että $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$ (eli että $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ ovat isomorfiset).

19. Osoita, että 0 on määriteltävä mallissa $(\mathbb{Z}, +)$ ($+$ on tavanomainen yhteenlasku kaksipaikkaisena funktiona), muttei struktuurissa $(\mathbb{Z}, S)$, missä S on seuraajafunktio $S(k) = k + 1$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.

20. Olkoon $L = \{E\}$ verkkojen aakkosto (eli E on kaksipaikkainen relaatiosymboli). Kuinka monta epäisomorfista kahden alkion
    a) L–mallia
    b) verkkoa
    on olemassa?