Logik I
Institutionen för matematik och statistik, Helsingfors universitet
Våren 2015
Övning 9

Uppgifterna baserar sig på kapitel 2.10–2.11 om substitution och allkvantifikatorns regler i naturlig deduktion i Jouko Väänänens Logic One.

1. (Repetition) Låt $\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}})$, där

- $M = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ och
- $(a, b) \in R^{\mathcal{M}}$ om och endast om b är delbar med a.

Vilken mängd definierar formeln

(a) $\exists x(R(x, y) \wedge \neg x = y)$
(b) $\exists y(R(x, y) \wedge \neg x = y)$

i modellen?

2. Är termen t fri för variabeln x i formeln A då

(1) t är y och A är $\exists y R(x, y)$
(2) t är y och A är $\exists x R(x, z)$
(3) t är y och A är $\exists z R(x, y)$
(4) t är z och A är $\exists z P(z) \wedge R(x, y)$
(5) t är z och A är $\exists z P(z) \wedge R(x, z)$

Om substitutionen är tillåten, vad är då $A(t/x)$?

3. Bevisa följande specialfall av substitutionslemmat: Låt A vara formeln $\forall z(R_0(y, z) \to P_0(z))$. Låt termen t vara variabeln x. Då är följande villkor ekvivalenta för alla modeller $\mathcal{M}$ och tolkningar s:

(1) $\mathcal{M} \models_s A(t/y)$
(2) $\mathcal{M} \models_{s(a/y)} A$, där $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$.

4. Härled med naturlig deduktion satsen $\forall x R_0(x, x)$ från satsen $\forall x \forall y R_0(x, y)$.

5. Härled satsen $\neg \forall x P_0(x)$ från satsen $\forall x \neg P_0(x)$.

6. Härled satsen $\forall y P_1(y)$ från satserna $\forall x P_0(x)$ och $\forall x(\neg P_1(x) \to \neg P_0(x))$.