Logiikka I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Kevät 2015
Harjoitus 9

Lue kurssimateriaalista luvut 2.10–2.11 sijoituksesta ja universaalikvanttorin päättelysäännöistä.

1. (Kertaus) Olkoon $\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}})$, missä

- $M = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ja
- $(a, b) \in R^{\mathcal{M}}$ joss a jakaa b:n.

Minkä joukon kaava

(a) $\exists x(R(x, y) \wedge \neg x = y)$
(b) $\exists y(R(x, y) \wedge \neg x = y)$

määrittelee mallissa?

2. Onko termi t vapaa muuttujalle x kaavassa A, kun

(1) t on y ja A on $\exists y R(x, y)$
(2) t on y ja A on $\exists x R(x, z)$
(3) t on y ja A on $\exists z R(x, y)$
(4) t on z ja A on $\exists z P(z) \wedge R(x, y)$
(5) t on z ja A on $\exists z P(z) \wedge R(x, z)$

Jos sijoitus on sallittu, mikä on $A(t/x)$?

3. Todista seuraava erikoistapaus sijoituslemmasta (engl. Substitution Lemma): Olkoon A kaava $\forall z(R_0(y, z) \to P_0(z))$. Valitaan termiksi t muuttuja x. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja kaikilla malleilla $\mathcal{M}$ ja tulkintafunktioilla s:

(1) $\mathcal{M} \models_s A(t/y)$
(2) $\mathcal{M} \models_{s(a/y)} A$, missä $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$.

4. Päättele lause $\forall x R_0(x, x)$ lauseesta $\forall x \forall y R_0(x, y)$.

5. Päättele lause $\neg \forall x P_0(x)$ lauseesta $\forall x \neg P_0(x)$.

6. Päättele lause $\forall y P_1(y)$ lauseista $\forall x P_0(x)$ ja $\forall x(\neg P_1(x) \to \neg P_0(x))$.