Logik I
Institutionen för matematik och statistik, Helsingfors universitet
Våren 2015
Övning 8

Läs kapitel 2.8–2.9 om fria och bundna variabler och definierbarhet i Jouko Väänänens Logic One (eller motsvarande kapitel i Hirvonen: Logik 1).

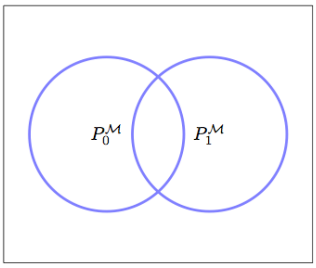
1. (Repetition) Visa att formeln $\neg\forall x P(x) \to \exists x \neg P(x)$ är valid.

2. Låt A vara en formel och $\mathcal{M}$ en modell. Visa att om s och s' är två tolkningar som ger samma värden åt alla variabler med fria förekomster i A så är A sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s om och endast om A är sann i $\mathcal{M}$ under tolkningen s'. (Anvisning: använd strukturell induktion över A.)

3. Vilka variabelförekomster är fria och vilka är bundna i följande formler? Vilka av formlerna är satser?

(a) $\forall x(P_0(x) \to P_1(y))$
(b) $\forall x(\forall y\, xEy \vee \forall z\, yEz)$
(c) $\forall y(\exists x\, x < y \vee \exists x\, y < x)$
(d) $\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$

4. Vilken mängd definierar formeln $P_0(x) \wedge \neg P_1(x)$ i den unära strukturen nedan?



5. Rita den binära relation som formeln

$$d < x \;\vee\; y < c$$

definierar i modellen $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, <, 0, 1)$, $c^{\mathcal{M}} = 0$, $d^{\mathcal{M}} = 1$.

6. Ett element a är definierbart i en modell $\mathcal{M}$ om mängden $\{a\}$ är definierbar i $\mathcal{M}$. Visa att 2 är definierbar i modellen $(\mathbb{N}, <)$, där $<$ är de naturliga talens naturliga ordning.