

Logiikka I

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Kevät 2015

Harjoitus 8

Lue kurssimateriaalista luvut 2.8–2.9 vapaista ja sidotuista muuttujista sekä määriteltävyydestä.

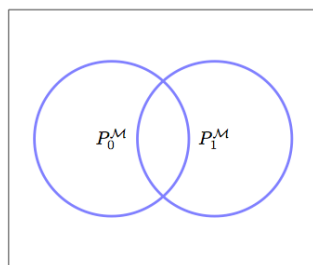
1. (Kertaus) Osoita, että kaava $\neg\forall xP(x) \rightarrow \exists x\neg P(x)$ on validi.

2. Olkoon A kaava ja \mathcal{M} malli. Osoita, että jos s ja s' ovat tulkintafunktioita jotka yhtyvät (siis saavat saman arvon) niillä muuttujilla jotka esiintyvät vapaina kaavassa A , niin s toteuttaa kaavan A mallissa \mathcal{M} jos ja vain jos s' toteuttaa kaavan A mallissa \mathcal{M} . (Ohje: Käytä induktiota kaavan A suhteen.)

3. Mitkä muuttujien esiintymät seuraavissa kaavoissa ovat vapaita ja mitkä sidottuja? Mitkä kaavoista ovat lauseita?

- (a) $\forall x(P_0(x) \rightarrow P_1(y))$
- (b) $\forall x(\forall y xEy \vee \forall z yEz)$
- (c) $\forall y(\exists x x < y \vee \exists x y < x)$
- (d) $\forall x(P(x) \rightarrow \exists yR(x, y))$

4. Osoita kaavan $P_0(x) \wedge \neg P_1(x)$ määrittelemä joukko allaolevassa unaarisessa struktuurissa.



5. Piirrä binäärinen relaatio, jonka kaava

$$d < x \vee y < c$$

määrittelee mallissa $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, <, 0, 1)$, $c^{\mathcal{M}} = 0$, $d^{\mathcal{M}} = 1$.

6. Alkio a on määriteltävä mallissa \mathcal{M} jos joukko $\{a\}$ on määriteltävä \mathcal{M} :ssä. Osoita, että 2 on määriteltävä mallissa $(\mathbb{N}, <)$, missä $<$ on luonnollisten lukujen luonnollinen järjestys.