Logik I
Institutionen för matematik och statistik, Helsingfors universitet
Våren 2015
Övning 12

Uppgifterna baserar sig på kapitel 2.19–2.22 om n-ställiga predikat, funktioner och isomorfism i Jouko Väänänens Logic One.

1. Härled satsen

$$\forall x \exists y (R_0(F_0^1(x), x) \vee R_1(y, x))$$

från satsen

$$\forall x \forall y (R_0(y, x) \vee R_1(y, x)).$$

2. Granska satsen:

$$(\forall x R_0^3(x, c, d) \vee \forall y P_0(y)) \to \forall x (R_0^3(x, c, d) \vee P_0(F_0^1(x))).$$

Är satsen valid, kontingent eller kontradiktorisk? Om den är valid eller kontradiktorisk, bevisa det med en lämplig härledning eller ett lämpligt semantiskt bevis. Om formeln är kontingent, visa det med modeller som du får från semantiska träd.

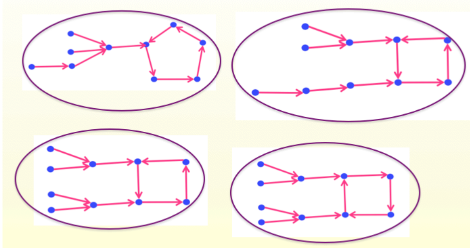
3. I följande "deduktion" av satsen $\forall y \exists z \forall x R_0^3(z, y, x)$ från satsen $\forall y \forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)$ finns ett fel:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y \forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)}{\forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)}\ \forall\,\mathbf{E}}{\exists z \forall x R_0^3(z, y, x)}\ \exists\,\mathbf{I}}{\forall y \exists z \forall x R_0^3(z, y, x)}\ \forall\,\mathbf{I}$$

Vad är felet?

4. Går det att härleda satsen $\exists x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1)$ från satserna $\forall x_0 (P_0(F_0^1(x_0)) \to R_0(x_0, F_0^1(x_0)))$ och $\exists x_1 P_0(x_1)$ med naturlig deduktion?

5. Vilka av följande modeller som alla har en enställig funktion är isomorfa med varandra?



6. Låt $L = \{P_0, c_0\}$, där P_0 är en enställig predikatsymbol och c_0 är en konstantsymbol. Låt vidare

$$\mathcal{M}_1 = (\mathbb{Z}, P_0^{\mathcal{M}_1}, c_0^{\mathcal{M}_1}),$$

där

$$P_0^{\mathcal{M}_1} = \mathbb{N} \quad \text{och} \quad c_0^{\mathcal{M}_1} = 1$$

och

$$\mathcal{M}_2 = (\mathbb{N}, P_0^{\mathcal{M}_2}, c_0^{\mathcal{M}_2}),$$

där

$$P_0^{\mathcal{M}_2} = \{2k : k \in \mathbb{N}\} \quad \text{och} \quad c_0^{\mathcal{M}_2} = 1.$$

Är $\mathcal{M}_1$ och $\mathcal{M}_2$ isomorfa?

7. Låt $L = \{P, R\}$ vara ett lexikon. Låt M vara mängden $\{0, 1, \ldots, 9\}$ (de naturliga talen från noll till nio). Vi definierar två L-strukturer $\mathcal{M}_1$ och $\mathcal{M}_2$ enligt följande: Båda har mängden M som domän,

$$P^{\mathcal{M}_1} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad \text{och} \quad P^{\mathcal{M}_2} = \{5, 6, 7, 8, 9\},$$

och

$$R^{\mathcal{M}_1} = R^{\mathcal{M}_2} = \{(2, 6), (6, 2), (2, 8)(8, 2), (6, 8), (8, 6)\}.$$

Är modellerna $\mathcal{M}_1 = (M, P^{\mathcal{M}_1}, R^{\mathcal{M}_1})$ och $\mathcal{M}_2 = (M, P^{\mathcal{M}_2}, R^{\mathcal{M}_2})$ isomorfa?

8. Låt $L = \{P, R\}$. Låt $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ vara två L-strukturer, vars domän är $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \mathrm{dom}(\mathcal{M}') = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Låt vidare

$$P^{\mathcal{M}} = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{och} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(2, 5), (5, 7), (7, 2)\}$$

samt

$$P^{\mathcal{M}'} = \{4, 5, 6, 7\} \quad \text{och} \quad R^{\mathcal{M}'} = \{(2, 3), (3, 4), (4, 2)\}.$$

Är $\mathcal{M}$ och $\mathcal{M}'$ isomorfa?