Logiikka I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Kevät 2015
Harjoitus 12

Lue kurssimateriaalista luvut 2.19–2.22 n-paikkiaisista predikaateista ja funktioista sekä isomorfismista.

1. Anna lauseelle

$$\forall x \exists y (R_0(F_0^1(x), x) \vee R_1(y, x))$$

luonnollinen päättely lauseesta

$$\forall x \forall y (R_0(y, x) \vee R_1(y, x)).$$

2. Tarkastellaan lausetta:

$$(\forall x R_0^3(x, c, d) \vee \forall y P_0(y)) \to \forall x (R_0^3(x, c, d) \vee P_0(F_0^1(x))).$$

Onko lause validi, kontingentti vai ristiriitainen? Jos se on validi tai ristiriitainen, osoita tämä sopivalla päättelyllä tai semanttisella todistuksella. Jos lause on kontingentti, osoita tämä malleilla, jotka saat semanttisten puiden menetelmällä.

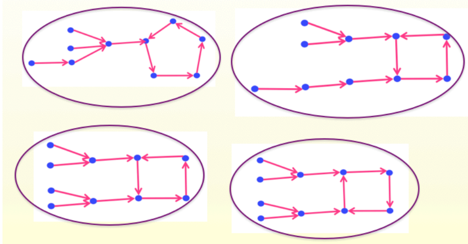
3. Seuraavassa "päättelyssä" lauseelle $\forall y \exists z \forall x R_0^3(z, y, x)$ lauseesta $\forall y \forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)$ on virhe:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall y \forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)}{\forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)}\ \forall\,\mathbf{E}}{\exists z \forall x R_0^3(z, y, x)}\ \exists\,\mathbf{I}}{\forall y \exists z \forall x R_0^3(z, y, x)}\ \forall\,\mathbf{I}$$

Mikä virhe?

4. Voidaanko predikaattilogiikan lauseista $\forall x_0 (P_0(F_0^1(x_0)) \to R_0(x_0, F_0^1(x_0)))$ ja $\exists x_1 P_0(x_1)$ luonnollisella päättelyllä päätellä lause $\exists x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1)$?

5. Mitkä seuraavista malleista, missä kussakin on yksi unaarinen (1-paikkainen) funktio, ovat isomorfiset keskenään?



6. Olkoon $L = \{P_0, c_0\}$, missä P_0 on yksipaikkainen predikaattisymboli ja c_0 on vakiosymboli. Olkoot

$$\mathcal{M}_1 = (\mathbb{Z}, P_0^{\mathcal{M}_1}, c_0^{\mathcal{M}_1}),$$

missä

$$P_0^{\mathcal{M}_1} = \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad c_0^{\mathcal{M}_1} = 1$$

ja

$$\mathcal{M}_2 = (\mathbb{N}, P_0^{\mathcal{M}_2}, c_0^{\mathcal{M}_2}),$$

missä

$$P_0^{\mathcal{M}_2} = \{2k : k \in \mathbb{N}\} \quad \text{ja} \quad c_0^{\mathcal{M}_2} = 1.$$

Ovatko $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ isomorfiset?

7. Olkoon $L = \{P, R\}$ aakkosto. Olkoon M joukko $\{0, 1, \ldots, 9\}$ (luonnolliset luvut nollasta yhdeksään). Määritellään kaksi L-mallia $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ seuraavasti: Molempien universumi on joukko M,

$$P^{\mathcal{M}_1} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad \text{ja} \quad P^{\mathcal{M}_2} = \{5, 6, 7, 8, 9\},$$

sekä

$$R^{\mathcal{M}_1} = R^{\mathcal{M}_2} = \{(2,6), (6,2), (2,8)(8,2), (6,8), (8,6)\}.$$

Ovatko mallit $\mathcal{M}_1 = (M, P^{\mathcal{M}_1}, R^{\mathcal{M}_1})$ ja $\mathcal{M}_2 = (M, P^{\mathcal{M}_2}, R^{\mathcal{M}_2})$ isomorfiset?

8. Olkoon $L = \{P, R\}$. Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ kaksi L-mallia, joiden universumit ovat $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \mathrm{dom}(\mathcal{M}') = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Olkoot lisäksi

$$P^{\mathcal{M}} = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{ja} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(2,5), (5,7), (7,2)\}$$

sekä

$$P^{\mathcal{M}'} = \{4, 5, 6, 7\} \quad \text{ja} \quad R^{\mathcal{M}'} = \{(2,3), (3,4), (4,2)\}.$$

Ovatko $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ isomorfiset?