SU-estimointi lineaarisin rajoittein

- Tarkastellaan lineaarista mallia

$$\mathbf{Y} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right), \quad \mathrm{r}\left(\mathbf{X}\right) = p,$$

  jossa parametriavaruus ei ole kuten aikaisemmin, vaan $\boldsymbol{\beta}$:n komponenttien oletetaan toteuttavan

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}, \;\; \mathbf{A} \;\; (q \times p) \;\; \text{ja} \;\; \mathbf{c} \;\; (q \times 1) \;\; \text{tunnettuja ja} \;\; \mathrm{r}\left(\mathbf{A}\right) = q.$$

- Tehtävänä on estimoida $\boldsymbol{\beta}$ ja σ^2 ottaen nämä rajoitteet huomioon. Parametriavaruus on näin ollen $B = \left\{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}\right\}, \sigma^2 > 0$.
- Esimerkiksi testattavana on hypoteesi $\beta_{p-q+1} = \cdots = \beta_p = 0$ (viimeiset q selittäjää tarpeettomia). Tällöin $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}_q\end{bmatrix}$ ja $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.
- Tai $\beta_{p-1} = \beta_p$, jolloin $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ ja $\mathbf{c} = 0$. Tällainen hypoteesi voi seurata tutkittavan ilmiön taustateoriasta.

SU-estimointi lineaarisin rajoittein

- Maksimoitava log-uskottavuusfunktio

$$l\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{y}\right) = -\frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{S}\left(\boldsymbol{\beta}\right), \quad \mathrm{S}\left(\boldsymbol{\beta}\right) = \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)$$

  ehdolla ehdolla $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$ ($\mathbf{A}$ $(q \times p)$, $\mathbf{c}$ $(q \times 1)$ ja $\mathrm{r}\left(\mathbf{A}\right) = q$).

- Kuten aikaisemmin, tämä johtaa $\boldsymbol{\beta}$:n osalta $\mathrm{S}\left(\boldsymbol{\beta}\right)$:n minimointiin ehdolla $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$.

- Jos $\hat{\boldsymbol{\beta}}_H$ on saatu estimaatti (eli $\boldsymbol{\beta}$:n SU-estimaatti), nähdään kuten aikaisemmin, että σ^2:n SU-estimaatti on $\hat{\sigma}_H^2 = \frac{1}{n}\mathrm{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_H)$.

- Lisäksi,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_H = \hat{\boldsymbol{\beta}} - \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}),$$

  jossa matriisin $\mathbf{A}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{A}'$ epäsingulaarisuus seuraa oletuksista $\mathrm{r}\left(\mathbf{A}\right) = q$ ja $\mathrm{r}\left(\mathbf{X}\right) = p$ (ks. HT 1.2).

- Laskemalla nähdään, että $\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}}_H = \mathbf{c}$.

SU-estimointi lineaarisin rajoittein

- Rajoitteet

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c},\ \mathbf{A}\,(q \times p)\,,\ \ \mathbf{c}\ \ (q \times 1)\ \text{ tunnettuja ja } \mathrm{r}\,(\mathbf{A}) = q,$$

voidaan esittää yhtäpitävästi ($\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^r$ tuntematon parametri)

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{d},\ \ \mathbf{C}\ \ (p \times r)\,,\ \mathbf{d}\ (p \times 1)\ \text{tunnettuja ja } \mathrm{r}\,(\mathbf{A}) = r.$$

- Malli $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},\ \ \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right)$, voidaan tällöin kirjoittaa

$$\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{d} = (\mathbf{X}\mathbf{C})\,\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

josta PNS:ää soveltaen saadaan $\boldsymbol{\phi}$:n SU-estimaatiksi

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \left(\mathbf{C}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{C}\right)^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{X}'\,(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{d})\,.$$

- SU-estimaatin invarianssiominaisuus $\Rightarrow\ \ \hat{\boldsymbol{\beta}}_H = \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{d}.$

F-testi yleiselle lineaariselle hypoteesille

- Oletetaan lin. malli $\mathbf{Y} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n\right)$ $(\mathrm{r}(\mathbf{X}) = p)$, ja tarkastellaan nollahypoteesia

$$H : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{A} \ (q \times p) \ \text{ ja } \ \mathbf{c} \ (q \times 1) \ \text{ tunnettuja}, \ \mathrm{r}(\mathbf{A}) = q.$$

- Testi on luontevaa perustaa erotukseen $\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}$, jossa $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ on $\boldsymbol{\beta}$:n (vapaa) PNS-estimaattori tai yhtäpitävästi (vapaa) SU-estimaattori.

- Koska $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ estimoi $\boldsymbol{\beta}$:aa tehokkaasti olipa H tosi vai ei, pätee aina $\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c} \approx \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c}$. Erotus $\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}$ saa siten tyypillisesti "pieniä" arvoja, kun H on tosi ja "suuria" arvoja, kun H ei ole tosi.

- Lausetta 2.1 käyttäen voidaan johtaa testisuure, jonka avulla erotuksen $\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}$ suuruutta voidaan arvioida.

- Saatava testi perustuu tilastollisen päättelyn kurssilla esitetyn Waldin testin periaatteeseen.

F-testi yleiselle lineaariselle hypoteesille

- Oletetaan lin. malli $\mathbf{Y} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{X}\beta, \sigma^2\mathbf{I}_n\right)$ $(\mathrm{r}(\mathbf{X}) = p)$, ja tarkastellaan nollahypoteesia

$$H : \mathbf{A}\beta = \mathbf{c}, \quad \mathbf{A} \ (q \times p) \ \text{ ja } \ \mathbf{c} \ (q \times 1) \ \text{ tunnettuja, } \ \mathrm{r}(\mathbf{A}) = q.$$

- Ns. F-testi hypoteesille H perustuu β:n (vapaaseen) PNS-estimaattoriin $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ ja σ^2:n harhattomaan estimaattoriin $S^2 = (n-p)^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})$.
- Testisuureena on ns. F-testisuure

$$F = (\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c})/qS^2 \overset{H}{\sim} F_{q,n-p}$$

- Suuret F:n arvot ovat kriittisiä nollahypoteesin kannalta. P-arvot:

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_H\left(F(\mathbf{Y}) \geq F(\mathbf{y})\right) = \mathrm{P}\left(F_{q,n-p} \geq F(\mathbf{y})\right),$$

jossa $F_{q,n-p}$ on $F_{q,n-p}$-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja.