

SU-estimointi

SU-estimointi satunnaisten selittäjien tapauksessa

- Joissakin tapauksissa selittävien muuttujien oletaminen ei-satunnaisiksi kiinteiksi luvuiksi saattaa tuntua rajoittavalta. Näin on esimerkiksi, kun
 - pojan pituutta selitetään isän pituudella ja aineisto on poimittu satunnaisotantaa käyttäen
 - selitettävä muuttuja on kotitalouksien sähkön kulutus ja selittävät muuttujat ovat sähkön hinta ja kotitalouksien reaalitulot ja käytetään on aikasarja-aineistoa
- Esitetty kiinteiden selittäjien malli ja siihen perustuva SU-estimointi voidaan perustella myös satunnaisten selittäjien tapauksessa ”sopivilla oletuksilla”, joiden voimassa ollessa päädytään samaan uskottavuusfunktioon kuin selittäjien olessa kiinteitä.

SU-estimointi

SU-estimointi satunnaisten selittäjien tapauksessa

- Otetaan lähtökohdaksi yhtälö

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n),$$

ja oletetaan, että satunnainen matriisi \mathbf{X} toteuttaa ehdot:

- (a) $\mathbf{X} \perp \boldsymbol{\varepsilon}$
- (b) \mathbf{X} :n todennäköisyysjakauma ei riipu parametreista $\boldsymbol{\beta}$ ja σ^2 .
- Satunnaismatriisin \mathbf{X} todennäköisyysjakaumalla tarkoitetaan sen kaikkien alkioiden yhteistodennäköisyysjakaumaa.
- \mathbf{X} :n tn -jakauma voidaan samaistaa sen alkioista muodostetun $np \times 1$ ulotteisen satunnaisvektorin tn -jakauman kanssa.
- Uskottavuusfunktio on johdettava muuttujien \mathbf{Y} ja \mathbf{X} yhteisjakaumasta.

SU-estimointi

SU-estimointi satunnaisten selittäjien tapauksessa

- Lähtökohtana yhtälö

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n), \quad \mathbf{X} \text{ satunnainen.}$$

- Ehto (a): $\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow f_{\mathbf{Y}, \mathbf{X}}(\mathbf{y}, \mathbf{X}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y} | \mathbf{X})$ eli

$$f_{\mathbf{Y}, \mathbf{X}}(\mathbf{y}, \mathbf{X}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right\}.$$

- Ehto (b): \mathbf{X} :n tn-jakauma ei riipu $(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$:sta $\Rightarrow f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ voidaan sisällyttää uskottavuusfunktion vakiotermiin.
- Siis, uskottavuusfunktio ja tilastollinen päättely voidaan perustaa ehdolliseen $N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ -jakaumaan ja toimia samoin kuin kiinteiden selittäjien tapauksessa.

Nyt $\hat{\beta} = \hat{\beta}(\mathbf{Y})$ ja $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2(\mathbf{Y})$ tulkitaan satunnaisiksi eli ne ovat estimaattoreita, joille pätee

Lause 2.1. *Tarkastellaan lineaarista mallia*

$$\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{X}\beta, \sigma^2 \mathbf{I}_n), \quad \beta \in \mathbb{R}^p, \quad \sigma^2 > 0, \quad \text{jossa } r(\mathbf{X}) = p.$$

Tällöin parametrien β ja σ^2 SU-estimaattoreille $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ ja $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})$ pätee

- (i) $\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$
- (ii) $n\hat{\sigma}^2 / \sigma^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) / \sigma^2 \sim \chi_{n-p}^2$
- (iii) $\hat{\beta} \perp\!\!\!\perp \hat{\sigma}^2$.

SU-estimointi

SU-estimaattorien ominaisuudet

- Suoraviivainen lasku \Rightarrow parametrien $\boldsymbol{\beta}$ ja σ^2 Fisherin informaatiomatriisi on $(\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \sigma^2))$

$$\mathbf{i}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} l(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}) & \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \sigma^2} l(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}) \\ \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2 \partial \boldsymbol{\beta}} l(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}) & \frac{\partial^2}{\partial (\sigma^2)^2} l(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^{-2} \mathbf{X}'\mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & n/2\sigma^4 \end{bmatrix}$$

- Tilastollinen päättely \Rightarrow mille tahansa harhattomille estimaattoreille $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ ja $\tilde{\sigma}^2$ pätee

$$\text{Cov} \left(\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\beta}} \\ \tilde{\sigma}^2 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} \sigma^{-2} \mathbf{X}'\mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & n/2\sigma^4 \end{bmatrix}^{-1} \geq \mathbf{0}$$

eli

$$\mathbf{c}' \text{Cov} \left(\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\beta}} \\ \tilde{\sigma}^2 \end{bmatrix} \right) \mathbf{c} - \mathbf{c}' \begin{bmatrix} \sigma^{-2} \mathbf{X}'\mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & n/2\sigma^4 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{c} \geq 0 \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{p+1}$$

- $\hat{\beta}$ on harhaton, tyhjentävä ja täystehokas
- $\hat{\sigma}^2$ on harhainen, mutta sen muunnos $S^2 = \frac{n}{n-p}\hat{\sigma}^2$ on harhaton, mutta ei täystehokas (kuten ei myöskään $\hat{\sigma}^2$). Sekä $\hat{\sigma}^2$ että S^2 ovat tyhjentäviä.
- Ns. Gaussin ja Markovin lauseen mukaan $\hat{\beta}$ on (varianssikriteerin mielessä) paras lineaarinen (eli tyyppiä \mathbf{AY} oleva) harhaton estimaattori myös ilman normaalisuusoletusta eli oletuksilla $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\beta$ ja $\text{Cov}(\mathbf{Y}) = \sigma^2\mathbf{I}_n$.
 - Toisin sanoen, mille tahansa parametrin β harhattomalle estimaattorille $\tilde{\beta} = \mathbf{AY}$ pätee kaikilla $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ ($\text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$)

$$\text{Cov}(\tilde{\beta}) - \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}'\text{Cov}(\tilde{\beta})\mathbf{a} \geq \sigma^2\mathbf{a}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}.$$