Lineaariset mallit, kl 2015, Harjoitus 6, viikko 18

1. Jatkoa HT:lle 4.4 ja 5.1 Oletetaan, että hypoteesi $\mu_1 = \mu_2$ on tullut hylätyksi. Muodosta $100(1-\alpha)$%:n luottamusväli erotukselle $\mu_1 - \mu_2$.

2. Jatkoa HT:lle 4.2. (i) Muodosta $100(1-\alpha)$%:n luottamusväli parametrivektorin $\boldsymbol{\beta}_1$ lineaarikombinaatiolle $\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1$ ($\mathbf{a} = [a_1 \ \cdots \ a_p]' \neq 0$). (ii) Tee sama olettaen, että $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$.

3. Tarkastellaan mallia

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \beta_3 x_{i2} + \varepsilon_i, \quad i = 1, ..., n,$$

jossa $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \sim \mathsf{N}\left(0, \sigma^2\right) \perp\!\!\!\perp$. Merkitsemällä $\bar{x}_j = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$, $j = 1, 2$, ja $\alpha = \beta_1 + \beta_2\bar{x}_1 + \beta_3\bar{x}_2$ voidaan malliyhtälö kirjoittaa muodossa

$$Y_i = \alpha + \beta_2(x_{i1} - \bar{x}_1) + \beta_3(x_{i2} - \bar{x}_2) + \varepsilon_i, \quad i = 1, ..., n.$$

(i) Mikä on parametrin α PNS-estimaattori?

(ii) Osoita, että parametrin β_1 PNS-estimaattorin varianssi on

$$\mathsf{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2\left(1 - r_{12}^2\right)},$$

jossa r_{12} on selittäjien x_{i1} ja x_{i2}, $i = 1, ..., n$, välinen otoskorrelaatiokerroin (ks. monisteen alaviite 10, s. 11).

(iii) Mitä tapahtuu $\hat{\beta}_1$:n varianssille ja parametrin β_1 luottamusvälille, kun selittäjien x_1 ja x_2 välinen korrelaatio kasvaa?

4. Oletetaan, että tavanomaisessa lineaarisessa mallissa $\mathbf{Y} \sim \mathsf{N}\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n\right)$ ($\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$, $\sigma^2 > \mathbf{0}$, $\mathsf{r}(\mathbf{X}) = p$) selittäjät ovat ortogonaalisia eli $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ on diagonaalimatriisi. Johda parametrin β_j PNS-estimaatti, t-testisuure hypoteesille $H : \beta_j = 0$ ja $100(1-\alpha)$%:n luottamusväli parametrille β_j (= $\boldsymbol{\beta}$:n j. komponentti). Miten nämä muuttuvat, jos mallista poistetaan joku selittäjistä x_k ($k \neq j$)?