

Lineaariset mallit, kl 2015, Harjoitus 1, viikko 12

1. Symmetristä matriisia \mathbf{A} ($n \times n$) sanotaan positiivisesti definiitiksi (merkitään $\mathbf{A} > \mathbf{0}$), jos $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0}$ kaikilla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (ks. monisteen Liite B.11). Osoita, että positiivisesti definiitti matriisi on epäsingulaarinen (eli sillä on käänteismatriisi). (Vihje: Yksi tapa on olettaa \mathbf{A} singulaariseksi ja todeta, ettei se voi tällöin olla positiivisesti definiitti.)

2. Olkoon \mathbf{A} ($n \times n$) positiivisesti definiitti ja \mathbf{B} ($n \times k$) astetta k oleva matriisi (eli \mathbf{B} :n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat; ks. monisteen Liite B.9). Osoita, että $\mathbf{B}'\mathbf{A}\mathbf{B}$ ($k \times k$) on positiivisesti definiitti ja siten epäsingulaarinen.

3. (i) Olkoon neliömatriisi \mathbf{A} ($n \times n$) idempotentti eli $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}$ (merkitään $\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$; ks. monisteen Liite B.10). Osoita, että $\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ on myös idempotentti.

(ii) Olkoon \mathbf{X} on astetta p oleva $n \times p$ matriisi ja $\mathcal{R}(\mathbf{X}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z} = \mathbf{X}\mathbf{b} \text{ jollain } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^p\}$ \mathbf{X} :n sarakevektoreiden virittämä \mathbb{R}^n :n p -ulotteinen aliavaruus (eli \mathbf{X} :n sarakeavaruus). Osoita, että matriisi $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ on symmetrinen ja idempotentti eli ns. (ortogonaalinen) projektio(matriisi). Totea myös, että matriisin \mathbf{P} määritelmässä esiintyvä matriisi $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ on epäsingulaarinen ja että yhtälö $\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pätee kaikilla $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{X})$ (kuten nimityksen projektiomatriisi perusteella odottaisikin).

4. Tarkastellaan aineistosta y_1, \dots, y_n laskettua otoskeskiarvoa $\bar{y} = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i$ ja otosvarianssia $s_y^2 = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$. Osoita, että

$$(n-1) s_y^2 = \mathbf{y}'(\mathbf{I}_n - \mathbf{J})\mathbf{y},$$

jossa $\mathbf{y} = [y_1 \ \dots \ y_n]'$ ja $\mathbf{J} = \mathbf{1}_n(\mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n)^{-1}\mathbf{1}_n'$ ($\mathbf{1}_n = [1 \ \dots \ 1]'$, $n \times 1$) on (edellisen tehtävän perusteella) projektiomatriisi.

5. (Yksisuuntainen varianssianalyysimalli) Olkoon $Y_{11}, \dots, Y_{1n_1}, Y_{21}, \dots, Y_{2n_2}, \dots, Y_{p1}, \dots, Y_{pn_p}$ riippumattomia ja $Y_{ji} \sim N(\mu_j, \sigma^2)$ ($\mu_j \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$). Esitä tilanne lineaarisen mallin erikoistapauksena käyttäen lineaarisen mallin matriisiesitystä. Mikä on matriisin \mathbf{X} aste?