$\LaTeX$-kurssin miniharjoitustyö

Nimi (opiskelijanumero)

Sisältö

1 Lineaarialgebraa **1**

2 Joukko-oppia **2**

3 Logiikkaa **2**

3.1 Propositiologiikkaa 2

3.2 Predikaattilogiikkaa 2

4 Analyysiä **3**

1 Lineaarialgebraa

Tässä osiossa palautetaan pikaisesti mieleen lineaarikuvauksen ja sen ytimen käsitteet. Tämän jälkeen todistetaan tulos, joka antaa hyödyllisen karakterisoinnin lineaarikuvauksen injektiivisyydelle.

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia. Funktio $L\colon V \to W$ on *lineaarikuvaus*, jos kaikilla $x, y \in V$ ja $c, d \in \mathbb{R}$ pätee

$$L(cx + dy) = cL(x) + dL(y). \tag{1}$$

Lineaarikuvauksen L *ydin* on

$$\ker L = \{x \in V \mid L(x) = 0\}.$$

Propositio 1.1. *Lineaarikuvaus L on injektio, jos ja vain jos* $\ker L = \{0\}$.

Todistus. Oletetaan, että L on injektio. Nyt jos $x \in \ker L$ eli $L(x) = 0$, niin koska myös $L(0) = 0$, seuraa injektiivisyydestä $x = 0$. Siispä $\ker L = \{0\}$.

Oletetaan sitten, että $\ker L = \{0\}$. Nyt jos $L(x) = L(y)$, niin yhtälöstä (1) seuraa

$$L(x - y) = L(x) - L(y) = 0,$$

joten $x - y \in \ker L = \{0\}$ ja siten $x - y = 0$ eli $x = y$. Siis L on injektio. $\square$

2 Joukko-oppia

Määritelmä 2.1. Joukkojen A ja B

(i) *yhdiste* on $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$,

(ii) *leikkaus* on $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$ ja

(iii) *erotus* on $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Määritelmä 2.2. Joukkoperheen $(A_j)_{j \in J}$, missä $J \neq \emptyset$, leikkaus on

$$\bigcap_{j \in J} A_j = \{x \mid x \in A_j \text{ kaikilla } j \in J\}.$$

Joukkoperheen yhdiste määritellään samaan tapaan. Tällöin ei vaadita ehtoa $J \neq \emptyset$, koska on luonnollista, että $\bigcup_{j \in \emptyset} A_j = \emptyset$.

Huomautus 2.3. De Morganin lait pätevät myös äärettömissä tapauksissa – esimerkiksi

$$X \setminus \bigcap_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} (X \setminus A_j).$$

3 Logiikkaa

3.1 Propositiologiikkaa

Osoitetaan propositiolause $p \to (q \to (p \wedge q))$ taulologiaksi tekemällä lauseelle totuustaulu:

p	q	p	$\to$	$(q$	$\to$	$(p$	$\wedge$	$q))$
0	0	0	**1**	0	1	0	0	0
0	1	0	**1**	1	0	0	0	1
1	0	1	**1**	0	1	1	0	0
1	1	1	**1**	1	1	1	1	1

3.2 Predikaattilogiikkaa

Predikaattilogiikassa on käytettävä Tarskin totuusmääritelmää, josta seuraa esimerkiksi, että

$$\neg \forall x P(x) \to \exists x \neg P(x)$$

on validi. Jonkin kaavan ϕ validisuus tarkoittaa, että jos $\mathcal{M}$ on mikä tahansa malli ja s sen mikä tahansa tulkintafunktio, niin aina

$$\mathcal{M} \models_s \phi,$$

missä esimerkiksi $\mathcal{M} \models_s P(x)$ tarkoittaa, että $s(x) \in P^{\mathcal{M}}$.

4 Analyysiä

Määritelmä 4.1. Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *tasaisesti jatkuva*, jos kaikille $\varepsilon > 0$ löytyy $\delta > 0$, jolla kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ ehdosta $|x-y| < \delta$ seuraa $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Lasketaan sitten pikku integraali:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x &= \mathop{\Big/}_{0}^{2\pi} -\cos x \\ &= -\cos 2\pi - (-\cos 0) \\ &= -1 + 1 = 0.\end{aligned}$$

Ja otetaan lopuksi pikku tulos:

Lause 4.2 (Divergenssilause)**.** *Olkoon $V \subset \mathbb{R}^3$ joukko, $S = \partial V$ sen reuna ja $\mathbf{F}$ jossain V:n ympäristössä määritelty funktio. Tällöin jos V ja $\mathbf{F}$ ovat "riittävän siistejä", niin*

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) \,\mathrm{d}V = \oiint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \,\mathrm{d}S.$$

Todistus. Epätriviaali. $\square$