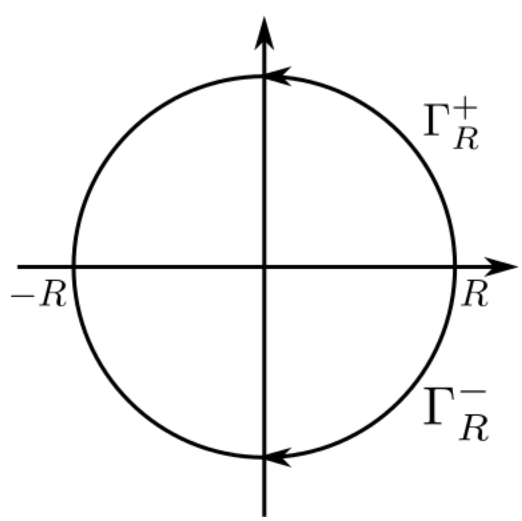
KOMPLEKSIANALYYSI I:N JATKOKURSSI

RITVA HURRI-SYRJÄNEN
LUENTO 12.2.2015

7. Määrättyjen integraalien laskemisesta...

7.1. **Toinen versio Jordanin lemmasta.** Olkoon $|f(z)| \leq M/R^k$, kun $|z| = R$, ja olkoot lisäksi M ja $k > 0$ vakioita. Määritellään kuvan 1 mukaisesti polut $\Gamma_R^+ : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\Gamma_R^+(\theta) = R\exp(i\theta)$ ja $\Gamma_R^- : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\Gamma_R^-(\theta) = R\exp(-i\theta)$. Tällöin

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^+} \exp(imz) f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \text{ kun } m > 0$$
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^-} \exp(imz) f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \text{ kun } m < 0.$$



Kuva 1. Integrointipolut Γ_R^+ ja Γ_R^-

Date: 12022015.

Todistus. Tarkastellaan ensin tilannetta $m > 0$. Olkoon $z = R\exp(i\theta)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\Gamma_R^+} \exp(imz) f(z)\,\mathrm{d}z \right| \\
&= \left| \int_0^\pi \exp(imR\exp(i\theta)) f(R\exp(i\theta)) iR\exp(i\theta)\,\mathrm{d}\theta \right| \\
&\leq \int_0^\pi |\exp(imR\exp(i\theta))| \underbrace{|f(R\exp(i\theta))|}_{\leq M/R^k} \underbrace{|iR\exp(i\theta)|}_{=R}\,\mathrm{d}\theta. \\
&\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi |\exp(imR\exp(i\theta))|\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi \underbrace{|\exp(imR\cos\theta)|}_{=1} |\exp(-mR\sin\theta)|\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-mR\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Koska $\sin\theta \geq 2\theta/\pi$, kun $\theta \in [0, 2\pi]$, saadaan edellisestä

$$\begin{aligned}
\frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta &\leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2mR\theta/\pi}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2M}{R^{k-1}} \left(-\frac{2mR\theta}{\pi} \right)^{-1} \Big/_{0}^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi} \\
&= -\frac{\pi M}{mR^k} \left(e^{-mR} - 1 \right) = \frac{\pi M}{mR^k} \left(1 - e^{-mR} \right).
\end{aligned}$$

Koska $m > 0$ ja $k > 0$, niin

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\pi M}{mR^k} \left(1 - e^{-mR} \right) = 0.$$

Olkoon seuraavaksi $m < 0$.

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{\Gamma_R^-} \exp(imz) f(z) \,\mathrm{d}z \right| \\
&= \left| \int_0^\pi \exp(imR\exp(-i\theta)) f(R\exp(-i\theta))(-i)R\exp(-i\theta)\,\mathrm{d}\theta \right| \\
&\le \int_0^\pi |\exp(imR\exp(-i\theta))| \underbrace{|f(R\exp(-i\theta))|}_{\le M/R^k} \underbrace{|(-i)R\exp(-i\theta)|}_{=R} \,\mathrm{d}\theta. \\
&\le \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi |\exp(imR\exp(-i\theta))| \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi \underbrace{|\exp(imR\cos\theta)|}_{=1} |\exp(mR\sin\theta)| \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{mR\sin\theta} \,\mathrm{d}\theta = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{mR\sin\theta} \,\mathrm{d}\theta. \\
&\le \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2mR\theta/\pi} \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2M}{R^{k-1}} \left(\frac{2mR\theta}{\pi} \right)^{-1} \Big/_{0}^{\pi/2} e^{2mR\theta/\pi} \\
&= \frac{\pi M}{mR^k} \left(e^{mR} - 1 \right).
\end{aligned}
$$

Koska $m < 0$ ja $k > 0$, niin

$$
\lim_{R\to\infty} \frac{\pi M}{mR^k} \left(e^{mR} - 1 \right) = 0.
$$

$\square$

8. Pääarvointegraaleista

8.1. **Esimerkki.** Tarkastellaan integraalia

$$
\int_{-1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x}.
$$

Funktio $f : x \mapsto 1/x$ ei ole integroituva välillä $[-1, 2]$, koska funktiolla f on singulariteetti origossa. Kuitenkin integraalin Cauchyn pääarvo on

$$\begin{aligned}
\text{C.p.a}\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{\varepsilon}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Big/_{\!-1}^{\,-\varepsilon}\ln|x| + \Big/_{\!\varepsilon}^{\,2}\ln|x|\right)\\
&= \ln\varepsilon - \ln|-1| + \ln 2 - \ln\varepsilon = \ln 2
\end{aligned}$$

8.2. *Huomautus.* On oleellista, että singulariteetin ympäriltä poistettava väli (edellisessä esimerkissä $(-\varepsilon,\varepsilon)$), on symmetrinen. Esimerkiksi $(-2\varepsilon,\varepsilon)$ ei käy.

8.3. **Lemma.** *Olkoon funktiolla $f(z)$ ensimmäisen kertaluvun napa pisteessä z_0, ja olkoot $\theta_1 \le \theta_2$ kulmia. Olkoon $\varepsilon \ge 0$ ja $\gamma_\varepsilon : [\theta_1,\theta_2] \to \mathbb{C}$, $\gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon\exp(it)$. Silloin*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = (\theta_2-\theta_1)\,i\,\mathrm{Res}(f,z_0).$$

Todistus. Koska funktiolla f on ensimmäisen kertaluvun napa pisteessä z_0, niin $f(z) = g(z)/(z-z_0)$, jossa funktio $g(z)$ on analyyttinen pisteen z_0 ympäristössä ja $g(z_0) \neq 0$. Taylorin kehitelmän avulla saadaan

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \cdots .$$

Funktion f Laurentin kehitelmäksi saadaan siten

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)} = \frac{g(z_0)}{(z-z_0)} + g'(z_0) + \cdots ,$$

joten $\mathrm{Res}(f;z_0) = g(z_0)$. Suorittamalla muuttujanvaihto $z = z_0 + \varepsilon\exp(i\theta)$, $\mathrm{d}z = i\varepsilon\exp(i\theta)\mathrm{d}\theta$ saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{g(z)}{(z-z_0)}\,\mathrm{d}z\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{g(z_0+\varepsilon\exp(i\theta))}{\varepsilon\exp(i\theta)} i\varepsilon\exp(i\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&= i\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\theta_1}^{\theta_2} g(z_0+\varepsilon\exp(i\theta))\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Koska funktio g on analyyttinen pisteessä z_0, se on jatkuva pisteessä z_0, joten $g(z_0+\varepsilon\exp(i\theta)) \to g(z_0)$ kun $\varepsilon \to 0$. Siis

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{g(z)}{(z-z_0)}\,\mathrm{d}z = i\int_{\theta_1}^{\theta_2} g(z_0)\,\mathrm{d}\theta = (\theta_2-\theta_1)\,i g(z_0)$$

□

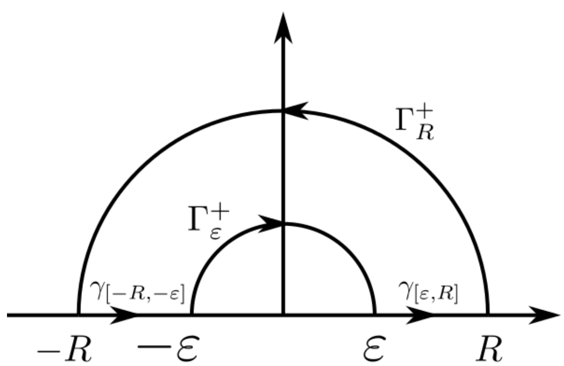
8.4. **Esimerkki.** Lasketaan pääarvointegraali

$$I = \text{C.p.a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$$

residylaskentaa hyödyntäen. Integrandilla on singulariteetti origossa, mutta poistamalla väli $(-\varepsilon, \varepsilon)$ singulariteetin ympäriltä, voidaan integraali kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\exp(ix)}{x^3+x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\exp(ix)}{x^3+x}\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \lim_{R\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{\gamma_{[-R,-\varepsilon]}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{[\varepsilon,R]}} f(z)\,\mathrm{d}z \right), \end{aligned}$$

jossa $f(z) = \exp(iz)/(z^3+z)$. Määritellään kuvan 2 mukaisesti polut $\Gamma_R^+ : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\Gamma_R^+(\theta) = R\exp(i\theta)$, kun $R \gg 1$ sekä $\Gamma_\varepsilon^+ : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\Gamma_\varepsilon^+(\theta) = \varepsilon\exp(i(\pi-\theta))$, kun $0 < \varepsilon < 1$. Määritellään lisäksi tulopolku $\Gamma = \gamma_{[-R,-\varepsilon]} * \Gamma_\varepsilon^+ * \gamma_{[\varepsilon,R]} * \Gamma_R^+$.



KUVA 2. Integrointipolut

Funktiolla $f(z) = \exp(iz)/(z^3+z)$ on ensimmäisen kertaluvun navat pisteissä 0 ja $\pm i$, mutta näistä vain pisteessä $z_0 = i$ oleva singulariteetti on polun Γ jäljen sisällä. Funktion f residy tässä pisteessä on

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z); i) &= \lim_{z\to i} \frac{\exp(iz)}{(z^3+z)}(z-i) = \lim_{z\to i} \frac{\exp(iz)}{z(z+i)(z-i)}(z-i) \\ &= \lim_{z\to i} \frac{\exp(iz)}{z(z+i)} = \frac{\exp(-1)}{2i^2} = -\frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

Residylauseen perusteella siis

$$\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z); i) = 2\pi i\left(-\frac{1}{2e}\right) = -\frac{\pi i}{e}.$$

Toisaalta, polun Γ määritelmän perusteella pätee myös

$$\int_{\gamma_{[-R,-\varepsilon]}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_\varepsilon^+} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{[\varepsilon,R]}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{\pi i}{e}.$$

Jordanin lemman nojalla

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

ja lemman 8.3 nojalla

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} f(z)\,\mathrm{d}z &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\overleftarrow{\Gamma_\varepsilon^+}} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= -(\pi-0)i\operatorname{Res}(f(z);0) = -\pi i \lim_{z_0\to 0} \frac{z\exp(iz)}{z(z+i)(z-i)} \\ &= -\pi i \lim_{z_0\to 0} \frac{\exp(iz)}{(z+i)(z-i)} = -\pi i.\end{aligned}$$

Yhdistämällä edelliset tulokset saadaan

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} \oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \text{C.p.a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{x^3+x}\,\mathrm{d}x - \pi i = -\frac{\pi i}{e} \iff$$

$$\text{C.p.a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{x^3+x}\,\mathrm{d}x = \pi i \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

8.5. *Huomautus.* Edellisen esimerkin ja kaavan $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ perusteella saadaan myös tulokset

$$\begin{aligned}\text{C.p.a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^3+x}\,\mathrm{d}x &= 0 \\ \text{C.p.a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^3+x}\,\mathrm{d}x &= \pi\left(1-\frac{1}{e}\right) \\ \text{C.p.a} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x^3+x}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right),\end{aligned}$$

joista viimeinen seuraa funktion $g : x \mapsto (\sin x)/(x^3+x)$ parillisuudesta.