KOMPLEKSIANALYYSI I:N JATKOKURSSI

RITVA HURRI-SYRJÄNEN
LUENTO 20.2.2015

11. Argumentin periaate ...

11.1. **Esimerkki.** Olkoon $\gamma : t \mapsto \exp(it)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ja olkoon

$$f : z \mapsto \frac{1}{z^5}\,.$$

Tällöin funktiolla f on 5-kertainen napa origossa ja ei nollakohtia. Tällöin nollakohtien lukumäärän ja napojen lukumäärän (kertaluku huomioituna) erotus on $0 - 5 = 5$. Lisäksi

$$(f \circ \gamma)(\theta) = \exp(-i5\theta)\,, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\,.$$

Siis polku $f \circ \gamma$ kiertää origon kellon kiertosuuntaan 5 kertaa ja siis $\mathrm{n}(f \circ \gamma, 0) = -5$, aivan kuten pitääkin Argumentin periaatteen nojalla.

11.2. *Huomautus.* Voimme siis laskea nollakohtien lukumäärän ja napojen lukumäärän erotuksen. Kysymys: Saako nollakohtien lukumäärän suoraan?

11.3. **Esimerkki.** Olkoon $\gamma(t) = \exp(it)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Olkoot $f(z) = 1$ ja

$$g(z) = \frac{z + 10^{-4}}{z}\,.$$

Tällöin funktiolla f ei ole nollakohtia eikä napoja. Funktiolla g on yksinkertainen napa origossa ja yksinkertainen nollakohta pisteessä $z = -10^{-4}$. Kuitenkin $f \approx g$ polun γ jäljellä.

11.4. *Huomautus.* Olkoon $f : z \mapsto z^2$. Tällöin funktiolla f on kaksinkertainen nollakohta origossa. Olkoon $g : z \mapsto z(z + 10^{-4})$. Tällöin funktiolla g on 2 erillistä nollakohtaa: origossa kertalukua 1 oleva nollakohta ja pisteessä $z = -10^{-4}$ kertalukua 1 oleva nollakohta. Siis aina on katsottava nollakohdan ja/tai navan kertaluku!

11.5. *Huomautus.* Hyvin heikko vastine reaalianalyysissä: Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Jos $f(a)$ ja $f(b)$ ovat eri merkkiset, niin funktiolla f on olemassa ainakin yksi nollakohta välillä $[a, b]$.

Date: 20022015.

12. Rouchen lause

Johdantoa: Olkoon $f : z \mapsto z^5 + z + 1$ ja olkoon $\gamma(t) = 2\exp(it)$, $0 \le t \le 2\pi$. Kysymys: Kuinka monta nollakohtaa funktiolla f on kiekossa $\mathbb{D}(0,2)$? Nyt

$$(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)) = 2^5 \exp(5it) + 2\exp(it) + 1\,,$$

$0 \le t \le 2\pi$. Koska funktiolla f ei ole napoja, niin Argumentin periaatteen nojalla nollakohtien lukumäärä kiekossa $\mathbb{D}(0,2)$ on yhtä suuri kuin $\mathrm{n}(f \circ \gamma, 0)$.
Merkitään

$$\Gamma_1(t) = 2^5 \exp(i5t), \quad 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Polku Γ_1 kiertää origon 5 kertaa positiiviseen kiertosuuntaan. Merkitään $\Gamma = f \circ \gamma$. Nyt

$$\begin{aligned} |\Gamma_1(t) - \Gamma(t)| &= |2^5 \exp(i5t) - 2^5 \exp(i5t) - 2\exp(it) - 1| \\ &\le 1 + 2 = 3 \ll 2^5\,. \end{aligned}$$

Siis Γ kulkee origon ympäri 5 kertaa ja Γ on hyvin lähellä polkua Γ_1, joten voisi luulla, että Γ kiertää origon 5 kertaa positiiviseen kiertosuuntaan (tämä todistetaan Rouchen lauseessa). Silloin Argumentin periaatteen nojalla funktiolla f olisi 5 nollakohtaa kiekossa $\mathbb{D}(0,2)$. Siis funktiolla $g : z \mapsto z^5$ ja $f : z \mapsto z^5 + z + 1$ on sama määrä nollakohtia kiekossa $\mathbb{D}(0,2)$, koska

$$|g(z) - f(z)| = |z + 1| \ll |g(|z| = 2)|\,.$$

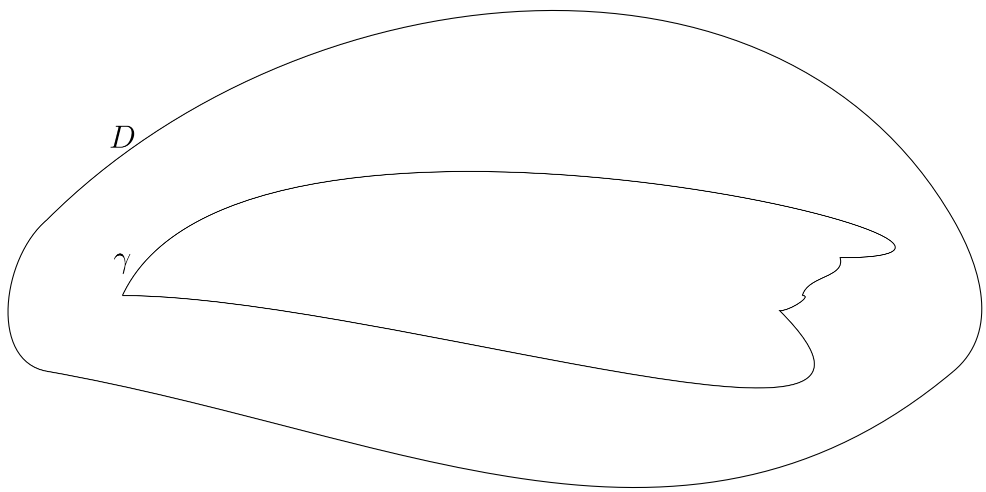
12.1. **Rouchen lause.** (Eugène Rouché, 1832-1910) Olkoon $|\gamma|$ positiivisesti suunnistetun yksinkertaisen suljetun polun γ jälki. Olkoon f ja g analyyttisiä alueessa D johon polun γ jälki ja jäljen rajaama alue kuuluvat (Kuva 1).
Jos

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \text{kaikilla } z \in |\gamma|\,,$$

niin funktioilla f ja g on sama määrä nollakohtia polun γ jäljen rajaaman alueen sisällä.

12.2. *Huomautus.* Rouchen lauseen perusteella saadaan selville ”monimutkaisenkin”funktion f nollakohtien lukumäärän suljetun polun rajaaman alueen sisällä, jos osaamme approksimoida funktiota f yksinkertaisemmalla funktiolla g, jonka nollakohtien lukumäärä tiedetään. Yksi tapa löytää g on muodostaa g niistä funktion f termeistä, jotka dominoivat polun γ jäljellä.

KUVA 1. (Rouchen lause) Alue D, joka sisältää polun γ jäljen ja polun γ rajaaman alueen.



12.3. **Esimerkki.** Olkoon $f(z) = z^4 - 8z + 10$. Kysymys: Kuinka monta nollakohtaa funktiolla f on avoimessa yksikkökiekossa $\mathbb{D}(0,1)$?
Ratkaisuehdotus: Kehällä $\partial\mathbb{D}(0,1)$

$$|z^4| = 1, \quad |-8z| = 8, \quad |10| = 10\,.$$

Siis 10 on funktion f osa, joka dominoi, kun $|z| = 1$. Merkitään $g(z) = 10$. Silloin

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= |z^4 - 8z + 10 - 10| \\ &\le 1 + 8 < 10 = |g(z)| \quad \forall z, |z| = 1\,. \end{aligned}$$

Siis Rouchen lauseen nojalla funktion f nollakohtien lukumäärä avoimessa yksikkökiekossa on sama kuin funktion g nollakohtien lukumäärä, mutta funktiolla g ei ole nollakohtia, joten funktiolla f ei ole nollakohtia kiekossa $\mathbb{D}(0,1)$.

12.4. *Huomautus.* Joskus ei ole selvää, kuinka Rouchen lausetta voisi käyttää. Esimerkiksi, kun $f : z \mapsto z^4 + z + 1$, $\gamma(t) = \exp(it)$, $0 \le t \le 2\pi$. Nyt mikään yksittäinen termi z^4, z tai 1 ei dominoi funktiota f, eivätkä edes kombinaatiot, kuten $z^4 + z$. Tällöin on käytettävä suoraan Argumentin periaatetta.

Todistetaan nyt Algebran peruslause Rouchen lauseen avulla. Toinen todistustapa on esitetty kurssilla Kompleksianalyysi I.

12.5. **Algebran peruslause.** Jokaisella n-asteisella polynomilla on tarkalleen n nollakohtaa (m-kertainen nollakohta lasketaan m kertaa).

Todistus. Merkitään

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \,,$$

missä $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n-1$.
Lasketaan nollakohtien lukumäärä avoimessa kiekossa $\mathbb{D}(0, R)$, missä R suuri, ja otetaan sitten raja $R \to \infty$.
Jos R on kyllin suuri, niin funktiota P voidaan approksimoida funktiolla $G(z) = a_n z^n$, jolloin

$$|P(z) - G(z)| < |G(z)| \quad \forall z \in \partial\mathbb{D}(0, R)\,.$$

Perustelu: kun $z \in \partial\mathbb{D}(0, R)$, niin $|G(z)| = |a_n| R^n$ ja

$$\begin{aligned} |P(z) - G(z)| &= |a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0| \\ &\leq |a_{n-1}| R^{n-1} + \ldots + |a_0|\,. \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\frac{|a_{n-1}| R^{n-1} + \ldots + |a_0|}{|a_n| R^n} \to 0, \qquad \text{kun } R \to \infty\,.$$

Siis kun R on kyllin suuri, niin $|a_{n-1}| R^{n-1} + \ldots + |a_0| < |a_n| R^n$ eli $|P(z) - G(z)| < |G(z)|$ kaikilla $|z| = R$. Siis polynomeilla P ja G on yhtä monta nollakohtaa avoimessa kiekossa $\mathbb{D}(0, R)$. Selvästi polynomilla $G(z)$ on origossa n-kertainen nollakohta ja muita nollakohtia ei ole. Siis polynomilla $P(z)$ on myös n nollakohtaa avoimessa kiekossa $\mathbb{D}(0, R)$, kun R kyllin suuri.
Kun annetaan $R \to \infty$, niin väite seuraa. $\square$