KOMPLEKSIANALYYSI I:N JATKOKURSSI

RITVA HURRI-SYRJÄNEN
LUENTO 13.2.2015

9. Integrandissa mukana moniarvoinen funktio

9.1. **Esimerkki.**

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} .$$

1. Tapa: Sijoittamalla $x = u^2$ saadaan integraali, joka osataan laskea.
2. Tapa: Vaikeuksia: (1) Funktio $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}$ ei ole parillinen. Siis integroimisvälin laajentaminen koko reaaliakseliksi ei auta.
(2) Funktiolla f on origossa singulariteetti, eli on tarkasteltava raja-arvoa

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{R \to \infty} \int_\varepsilon^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} .$$

Tarkoitus olisi korvata kyseessä oleva integraali kompleksisella integraalilla

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{R \to 0} \int_{\gamma_{[\varepsilon, R]}} \frac{dz}{\sqrt{z}(z+4)} .$$

Tämä ei kuitenkaan ole oikein, sillä funktio $z \mapsto \sqrt{z}$ on moniarvoinen.
Tärkeä asia: Funktio $f : z \mapsto \sqrt{z}$ ei ole analyyttinen koko kompleksitasossa. On valittava haara, mutta

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log}_{(-\pi,\pi]}(z)\right)$$

ei käy, sillä $-4 \in (-\infty, 0)$. Valitaan haaraksi

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log}_{(0,2\pi]}(z)\right) .$$

Date: 13022015.

Silloin

$$\begin{aligned} f(-1) = \sqrt{-1} &= \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}_{(0,2\pi]}(-1)\right) \\ &= |-1|^{1/2}\exp\left(\frac{i}{2}\operatorname{Arg}_{(0,2\pi]}(-1)\right) \\ &= 1\cdot\exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) \\ &= i\,. \end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$, $R > 0$ ja $\delta > 0$ (pieni). Merkitään

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\gamma_{[\varepsilon+\delta i, R+\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)}\,, \\ I_2 &:= \int_{\gamma_{[\varepsilon-\delta i, R-\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)}\,. \end{aligned}$$

Janalla $|\gamma_{[\varepsilon+\delta i, R+\delta i]}|$ pätee $z = x + \delta i$, $\varepsilon \le x \le R$, joten

$$I_1 = \int_\varepsilon^R \frac{dx}{f(x+\delta i)(x+4+\delta i)}\,.$$

Kun $\delta \to 0$, niin $x + 4 + \delta i \to x + 4$. Lisäksi

$$\begin{aligned} f(x+\delta i) &= \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}_{(0,2\pi]}(x+\delta i)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\ln|x+\delta i| + \frac{i}{2}\operatorname{Arg}_{(0,2\pi]}(x+\delta i)\right)\,. \end{aligned}$$

Kun $\delta \to 0$, niin $\ln|x+\delta i| \to \ln x$ ja $\operatorname{Arg}_{(0,2\pi]}(x+\delta i) \to 0$. Siis

$$f(x+\delta i) \to \exp\left(\frac{1}{2}\ln x\right) = \sqrt{x},\ \text{kun } \delta \to 0\,.$$

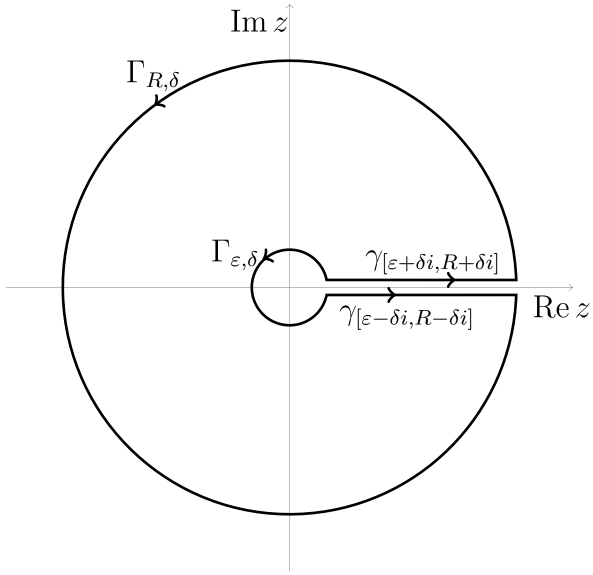
Siis

$$\lim_{\delta\to 0} I_1 = \lim_{\delta\to 0}\int_{\gamma_{[\varepsilon+\delta i, R+\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} = \int_\varepsilon^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}\,.$$

Lisäksi

$$I_2 = \int_{\gamma_{[\varepsilon-\delta i, R-\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} = \int_\varepsilon^R \frac{dx}{f(x-\delta i)(x+4-\delta i)}\,.$$

KUVA 1. Integroimispolku



Kun $\delta \to 0$, niin $x + 4 - \delta i \to x + 4$. Toisaalta

$$\begin{aligned} f(x - \delta i) &= \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}_{(0,2\pi]}(x - \delta i)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\Big(\ln|x - \delta i| + i\operatorname{Arg}_{(0,2\pi]}(x - \delta i)\Big)\right). \end{aligned}$$

Kun $\delta \to 0$, niin $\ln|x - \delta i| \to \ln x$, mutta $\operatorname{Arg}_{(0,2\pi]}(x - \delta i) \to 2\pi$ (eikä 0). Siis

$$f(x - \delta i) \to \exp\left(\frac{1}{2}(\ln x + i2\pi)\right) = \sqrt{x}\exp(\pi i) = -\sqrt{x}\,,$$

kun $\delta \to 0$.
Huomaa: Kun $z \to x$ ylemmältä puolitasolta, niin $f(z) \to \sqrt{x}$ ja kun $z \to x$ alemmalta puolitasolta, niin $f(z) \to -\sqrt{x}$. Siis

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\gamma_{[\varepsilon-\delta i,R-\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}\,.$$

Funktion $z \mapsto \frac{1}{f(z)(z+4)}$ "branch cut"on $[0,\infty)$ ja erillinen erikoispiste on $z = -4$. Merkitään (kts. Kuva 1)

$$\gamma = \gamma_{[\varepsilon+\delta i,R+\delta i]} * \Gamma_{R,\delta} * \overleftarrow{\gamma}_{[\varepsilon-\delta i,R-\delta i]} * \overleftarrow{\Gamma}_{\varepsilon,\delta}$$

Polun γ jälki $|\gamma|$ kiertää pisteen $z = -4$ ($R \gg 4$) ja välttää puolisuoran $[0, \infty)$. Siis

$$\int_\gamma \frac{dz}{f(z)(z+4)} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{f(z)(z+4)}, -4\right).$$

Funktio f on analyyttinen pisteessä $z = -4$ ja $f(-4) \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(-4) &= \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}_{(0,2\pi]}(-4)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\ln|-4| + \frac{1}{2} i \operatorname{Arg}_{(0,2\pi]}(-4)\right) \\ &= \exp\left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2i\,. \end{aligned}$$

Koska funktiolla $z \mapsto \frac{1}{f(z)(z+4)}$ on ensimmäisen kertaluvun napa pisteessä $z = -4$, niin

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{f(z)(z+4)}, -4\right) = \lim_{z\to -4} \frac{z+4}{f(z)(z+4)} = \frac{1}{2i}\,.$$

Siis

$$\int_\gamma \frac{dz}{f(z)(z+4)} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi\,.$$

Nyt tulopolun määritelmästä seuraa

$$\int_{\gamma_{[\varepsilon+\delta i, R+\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} + \int_{\Gamma_{R,\delta}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} - \int_{\gamma_{[\varepsilon-\delta i, R-\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} + \int_{\overleftarrow{\Gamma}_{\varepsilon,\delta}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} = \pi\,.$$

Jos nyt $\delta \to 0$, niin osoitimme jo, että

$$\int_{\gamma_{[\varepsilon+\delta i, R+\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} \to \int_\varepsilon^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}\,,$$

ja

$$\int_{\gamma_{[\varepsilon-\delta i, R-\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} \to -\int_\varepsilon^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}\,.$$

Lisäksi $\Gamma_{R,\delta} \to \Gamma_R$, $\Gamma_{\varepsilon,\delta} \to \Gamma_\varepsilon$, kun $\delta \to 0$. Tässä $\Gamma_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\Gamma_R(t) = R\exp(it)$ ja $\Gamma_\varepsilon : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\Gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon\exp(it)$.
Siis ottamalla raja $\delta \to 0$ saadaan

$$\pi = 2\int_\varepsilon^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{f(z)(z+4)} + \int_{\overleftarrow{\Gamma}_\varepsilon} \frac{dz}{f(z)(z+4)}\,.$$

Kun $z \in |\Gamma_R|$, niin $|z| = R$ ja siis

$$R - 4 \leq |z+4| \leq R + 4\,,$$

ja $|f(z)| = R^{1/2}$. Nyt Arviolemman nojalla

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{f(z)(z+4)}\right| \le \frac{2\pi R}{\sqrt{R}(R-4)} = \frac{2\pi}{\sqrt{R}(1-\frac{4}{R})} \to 0\,,$$

kun $R \to \infty$.
Kun $z \in |\Gamma_\varepsilon|$, niin $|z| = \varepsilon$ ja

$$4 - \varepsilon \le |z+4| \le 4 + \varepsilon\,,$$

ja $|f(z)| = \varepsilon^{1/2}$. Siis

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{dz}{f(z)(z+4)}\right| \le \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}(4-\varepsilon)} = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{4-\varepsilon} \to 0\,,$$

kun $\varepsilon \to 0$. Siis

$$\pi = 2\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}\,.$$

Näin ollen lopullinen tulos on

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} = \frac{\pi}{2}\,.$$

10. Suorakaiteen reuna polun jälkenä

10.1. **Esimerkki.** Tyyppiesimerkki

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\alpha x}}{\phi(e^x)}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Merkitään

$$\Gamma_1 := \gamma_{[-x_1,x_2]}, \qquad \Gamma_2 := \gamma_{[x_2,x_2+2\pi i]},$$
$$\Gamma_3 := \gamma_{[-x_1+2\pi i,x_2+2\pi i]}, \qquad \Gamma_3 := \gamma_{[-x_1,-x_1+2\pi i]}.$$

Tällöin tulopolku $\Gamma := \Gamma_1 * \Gamma_2 * \overleftarrow{\Gamma}_3 * \overleftarrow{\Gamma}_4$ on suljettu, suorakaiteen muotoinen ja sen kiertosuunta on vastapäivään.
Kun $z \in |\Gamma_3|$, niin $z = -t + 2\pi i$, $-x_2 \le t \le x_1$

$$\begin{aligned}\int_{\overleftarrow{\Gamma}_3} \frac{\exp(\alpha z)}{\phi(\exp(z))}\,dz &= \int_{-x_2}^{x_1} \frac{\exp(\alpha(-t+2\pi i))}{\phi(\exp(-t+2\pi i))}(-1)\,dt \\ &= \int_{-x_2}^{x_1} \frac{\exp(-\alpha t + 2\pi\alpha)}{\phi(e^{-t})}(-1)\,dt \\ &= \exp(2\pi i\alpha)\int_{x_1}^{-x_2} \frac{e^{-\alpha t}}{\phi(e^{-t})}\,dt \\ &\overset{t=-x}{=} -\exp(2\pi i\alpha)\int_{-x_1}^{x_2} \frac{e^{\alpha x}}{\phi(e^x)}\,dx\,.\end{aligned}$$

Jos funktiolle ϕ pätee

$$\int_{\Gamma_k} \frac{\exp(\alpha z)}{\phi(\exp(z))}\, dz \to 0\,,$$

kun $x_1, x_2 \to \infty$, $k = 2, 4$, saamme

$$(1 - \exp(2\pi i\alpha)) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\phi(e^x)}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}\left(\frac{\exp(\alpha z)}{\phi(\exp(z))}; z_k \right)\,,$$

missä $z_1, \dots, z_p$ ovat suorien $\operatorname{Im} z = 0$ ja $\operatorname{Im} z = 2\pi$ välissä sijaitsevat funktion f navat. Syy:

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz + \int_{\overleftarrow{\Gamma_4}} f(z)\, dz + \int_{-x_1}^{x_2} \frac{e^{\alpha x}}{\phi(e^x)}\, dx + (-\exp(2\pi i\alpha)) \int_{-x_1}^{x_2} \frac{e^{\alpha x}}{\phi(e^x)}\, dx\,.$$

10.2. *Huomautus.* Funktion käyttäytymisen suljetulla polulla (suljetun polun jäljellä) suuressa määrin kontrolloi erilliset erikoispisteet polun jäljen rajaaman alueen sisällä.

10.3. **Esimerkki.** Määrää

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^{2x} + 1}\, dx, \quad 0 < \alpha < 1\,.$$

Integrandilla on suorien $\operatorname{Im} z = 0$ ja $\operatorname{Im} z = 2\pi$ välissä singulariteetit pisteissä $i\frac{\pi}{2}$ ja $3i\frac{\pi}{2}$. Residyt näissä pisteissä ovat

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{\exp(\alpha z)}{\exp(2z) + 1}, i\frac{\pi}{2} \right) &= \lim_{z \to i\pi/2} (z - i\pi/2) \frac{\exp(\alpha z)}{\exp(2z) + 1} \\
&= \lim_{z \to i\pi/2} \frac{\exp(\alpha z) + (z - i\pi/2)\alpha \exp(\alpha z)}{2\exp(2z)} \\
&\overset{L'H}{=} -\frac{1}{2} \exp\left(\alpha i \frac{\pi}{2} \right)\,, \\
\operatorname{Res}\left(\frac{\exp(\alpha z)}{\exp(2z) + 1}, i\frac{3\pi}{2} \right) &= \lim_{z \to i3\pi/2} (z - i3\pi/2) \frac{\exp(\alpha z)}{\exp(2z) + 1} \\
&= \lim_{z \to i3\pi/2} \frac{\exp(\alpha z) + (z - i3\pi/2)\alpha \exp(\alpha z)}{2\exp(2z)} \\
&\overset{L'H}{=} -\frac{1}{2} \exp\left(3i \frac{\pi\alpha}{2} \right)\,.
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2\pi i}{1 - \exp(2\pi i\alpha)} \left(-\frac{1}{2} \exp\left(i\frac{\pi\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2} \exp\left(i\frac{3\pi\alpha}{2} \right) \right) \\
&= \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi\alpha}{2}}\,.
\end{aligned}$$