KOMPLEKSIANALYYSI I:N JATKOKURSSI

RITVA HURRI-SYRJÄNEN
LUENTO 6.2.2015

7. Määrättyjen integraalien laskemisesta ...

7.1. **Lause.** Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analyyttinen avoimessa puolitasossa $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ äärellistä määrää napoja $z_1, \cdots, z_p$ lukuunottamatta. Olkoon $\Gamma_R(t) = R\exp(it)$, $t \in [0, \pi]$ polku siten, että kaikki navat sisältyvät suljetun polun $\gamma_{[-R,R]} * \Gamma_R$ (eli polku koostuu janasta $[-R, R]$ ja puoliympyrästä Γ_R) rajoittamaan alueeseen ja oletetaan, että suurilla R on olemassa vakio M siten, että

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^2}$$

kun luku z on polun Γ_R jäljellä. Silloin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}(f; z_k)\,.$$

7.2. *Huomautus.* Edellisessä lauseessa on oleellista, että navat eivät ole reaaliakselilla, ja että funktion modulille on kasvurajoite, jotta määrättävä integraali on olemassa.

7.3. *Huomautus.* Tulofunktion integroimislauseen ja Cauchyn residyteoreeman nojalla

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{\gamma_{[-R,R]} * \Gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}(f; z_k)\,.$$

Koska

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz \right| \leq \frac{M\pi R}{R^2} = \frac{\pi M}{R} \to 0\,, \text{ kun } R \to \infty\,,$$

niin

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}(f; z_k)\,.$$

Date: 06022015.

Koska

$$|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}\,, \text{ kun } |x| \text{ kyllin suuri }, \tag{7.1}$$

integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ on olemassa ja siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}(f; z_k)\,.$$

7.4. *Huomautus.* Ehto (7.1) toteutuu, kun

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\,,$$

missä P ja Q ovat polynomeja, joille $\deg Q \geq 2 + \deg P$ ja polynomilla Q ei ole reaalisia nollakohtia.

Rationaalifunktion integrointi reaaliakselilla

7.5. **Esimerkki.** Määrää

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Ensinnäkin integraali on olemassa, joten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1}\,.$$

Määritellään

$$f : z \mapsto \frac{1}{z^4+1}\,.$$

Polynomin z^4+1 nollakohdat ovat

$$z^4+1 = 0 \iff z = \underbrace{\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)}_{=z_1}, \underbrace{\exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right)}_{=z_2}, \underbrace{\exp\left(\frac{5\pi i}{4}\right)}_{=z_3}, \underbrace{\exp\left(\frac{7\pi i}{4}\right)}_{=z_4}.$$

Näin ollen pisteet $z_1, \ldots, z_4$ ovat funktion f erillisiä erikoispisteitä, tarkemmin ensimmäisen kertaluvun napoja. Näistä ylemmässä puolitasossa sijaitsevat z_1 ja z_2. Olkoon $R > 2$ ja $\gamma_R(t)$ jana reaaliakselilla pisteestä $-R$ pisteeseen R. Määritellään $\Gamma_R : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ asettamalla $\Gamma_R(t) = R\exp(i(\pi - t))$. Nyt $\gamma_R * \overleftarrow{\Gamma}_R$ kiertää luvut $z_1 = \exp(\pi i/4)$ ja

$z_2 = \exp(3\pi/4)$. Cauchyn residylauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R * \overleftarrow{\Gamma}_R} f(z)\,dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f;\exp(\pi i/4)) + 2\pi i \operatorname{Res}(f;\exp(3\pi i/4)) \\
&= 2\pi i \lim_{z\to\exp(\pi i/4)} \frac{z-\exp(\pi i/4)}{z^4+1} + 2\pi i \lim_{z\to\exp(3\pi i/4)} \frac{z-\exp(3\pi i/4)}{z^4+1} \\
&\overset{l'Hôpital}{=} 2\pi i \lim_{z\to\exp(\pi i/4)} \frac{1}{4z^3} + 2\pi i \lim_{z\to\exp(3\pi i/4)} \frac{1}{4z^3} \\
&= 2\pi i \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right) + 2\pi i \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{9\pi i}{4}\right) \\
&= \frac{\pi i}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Toisaalta tulopolun integraalilauseen nojalla pätee

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R * \overleftarrow{\Gamma}_R} f(z)\,dz &= \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\overleftarrow{\Gamma}_R} f(z)\,dz \\
\Longrightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz &= \underbrace{\int_{\gamma_r * \overleftarrow{\Gamma}_R} f(z)\,dz}_{=\pi/\sqrt{2}} + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\,.
\end{aligned}$$

Koska integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

on olemassa (perustelu vastaavasti kuin Huomautuksissa 7.3 ja 7.4), niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\,.$$

Kun $z \in \Gamma_R$, niin $|z| = R$. Tällöin $|z^4| = R^4$ ja

$$\begin{aligned}
R^4 - 1 \le |z^4+1| &\le R^4 + 1 \\
\Longleftrightarrow \frac{1}{R^4+1} \le \frac{1}{|z^4+1|} &\le \frac{1}{R^4-1}\,.
\end{aligned}$$

Nyt Arviolemman nojalla

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^4+1}\right| \le \frac{\pi R}{R^4-1} \longrightarrow 0, \text{ kun } R \longrightarrow \infty\,.$$

Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

7.6. *Huomautus.* Integrandin parillisuuden nojalla

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

Rationaalifunktion integrointi, jossa mukana trigonometrinen funktio ja integroimisväli on $(-\infty,\infty)$

7.7. **Esimerkki.** Määrää

$$I := \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(-ix)}{x^1+1}\,dx\,.$$

Olkoon γ_R jana reaaliakselilla pisteestä $-R$ pisteeseen R. Määritellään $\Gamma_R : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\Gamma_R(t) = R\exp(i(\pi - t))$. Nyt kuitenkin

$$\int_{\overleftarrow{\Gamma}_R} \frac{\exp(-iz)}{z^2+1}\,dz \not\to 0,\ \text{kun } R\to\infty\,.$$

Syy: Merkitään $z = x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$, jolloin

$$|\exp(-i(x+iy))| = |e^y||\exp(-ix)|\,.$$

Ylemmällä puolitasolla $|y|\geq 0$, joten $|e^y|$ hajaantuu, kun $R\to\infty$. Integraali saadaan kuitenkin laskettua eri polulla. Määritellään $\Gamma_R^-[0,\pi]\to\mathbb{C}$, $\Gamma_R^-(t) = R\exp(-i(\pi-t)) = R\exp(i(t-\pi))$. Tällöin

$$\int_{\Gamma_R^-} \frac{\exp(-iz)}{z^2+1}\,dz \to 0,\ \text{kun } R\to\infty,$$

sillä polulla Γ_R^- pätee $|z| = R$, joten $|z^2| = R^2$ ja

$$\begin{aligned} &R^2-1 \leq |z^2+1| \leq R^2+1 \\ \iff\ &\frac{1}{R^2+1} \leq |z^2+1| \leq \frac{1}{R^2-1}, \\ &|\exp(-iz)| = |\exp(-i(x+iy))| = |\exp(-ix)|e^y, \end{aligned}$$

missä $z = x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$. Koska alemmalla puoliympyrällä Γ_R^- pätee $y\leq 0$, niin $e^y\leq 1$. Tällöin arviolemman nojalla

$$\left|\int_{\Gamma_R^-} \frac{\exp(-iz)}{z^2+1}\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0,\ \text{kun } R\to\infty\,.$$

Merkitään $f : z\mapsto \frac{\exp(-iz)}{z^2+1}$. Funktiolla f on erilliset erikoispisteet $z=i$ ja $z=-i$, mutta vain piste $z=-i$ jää integroimispolun $\gamma_R * \overleftarrow{\Gamma}_R^-$

rajaaman alueen sisään. Nyt Residyteoreeman nojalla

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_R * \overleftarrow{\Gamma}_R^-} f(z)\,dz &= -2\pi i \operatorname{Res}(f;-i)\\ &= -2\pi i \lim_{z\to -i} \frac{(\exp(-iz))(z+i)}{z^2+1}\\ &= -2\pi i \lim_{z\to -i} \frac{\exp(-iz)}{z-i}\\ &= -2\pi i \frac{1}{-2ie}\\ &= \frac{\pi}{e}\,.\end{aligned}$$

Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ix)}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{\exp(-iz)}{z^2+1}\,dz,$$

$$\int_{\gamma_R} \frac{\exp(-iz)}{z^2+1} = \underbrace{\oint_{\gamma_R * \overleftarrow{\Gamma}_R^-} f(z)\,dz}_{=\pi/e} - \underbrace{\int_{\overleftarrow{\Gamma}_R^-} f(z)\,dz}_{\to 0}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ix)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e}\,.$$

7.8. **Esimerkki.** Määrää integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx\,.$$

1. Tapa: Kirjoitetaan kosini eksponenttifunktion avulla

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\exp(ix) + \exp(-ix)\right).$$

Tällöin integraali tulee muotoon

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ix)}{x^2+1}\,dx\,.$$

Ensimmäinen integraali voidaan laskea käyttämällä aiempien esimerkkien puoliympyräpolkua Γ_R^+ ylemmässä puolitasossa ja toinen integraali käyttämällä puoliympyräpolkua Γ_R^- alemmassa puolitasossa. Tämä on kuitenkin työläs tapa.
2. Tapa: Koska

$$\cos x = \operatorname{Re}(\exp(-ix)) = \operatorname{Re}(\cos(-x) + i\sin(-x)) = \operatorname{Re}(\cos x - i\sin x)\,,$$

niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ix)}{x^2+1}\,dx\right) = \frac{\pi}{e}\,.$$

Varoitus: Edellä käytetty integrointikeino ei toimi aina:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x+i}\,dx, \quad \frac{\cos x}{x+i} \neq \mathrm{Re}\left(\frac{\exp(-ix)}{x+i}\right).$$

7.9. **Esimerkki.** Määrää integraali

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx\,.$$

Edellisestä esimerkistä integroitavan funktion parillisuuden vuoksi

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} = \frac{\pi}{2e}\,.$$

7.10. **Esimerkki.** Integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx = 0\,,$$

sillä integroitava funktio on pariton. Toinen tapa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx = -\,\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ix)}{x^2+1}\,dx\right) = 0\,.$$

7.11. **Jordanin lemma.** Olkoot P ja Q polynomeja siten, että $\deg Q \geq \deg P + 1$.
Olkoot $\Gamma_R^+(t) := R\exp(i(\pi - t))$ ja $\Gamma_R^-(t) := R\exp(-it)$, kun $t \in [0,\pi]$.
Jos $m > 0$, niin

$$\int_{\Gamma_R^+} \frac{P(z)\exp(imz)}{Q(z)}dz \to 0\,,\ \text{kun } R \to \infty\,.$$

Jos $m < 0$, niin

$$\int_{\Gamma_R^-} \frac{P(z)\exp(imz)}{Q(z)}dz \to 0\,,\ \text{kun } R \to \infty\,.$$

7.12. **Lause.** Olkoon

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\,,$$

missä $P = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ ja $Q = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j$, $b_m \neq 0$, ovat polynomeja, joille $\deg Q \geq 2 + \deg P$ ja polynomilla Q ei ole reaalisia juuria. Olkoon $c \geq 0$. Silloin

$$\int_{\infty}^{\infty} f(x)\exp(icx)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f(z)\exp(icz); z_k)\,,$$

missä luvut $z_1, \cdots, z_p$ ovat funktion f navat avoimessa puolitasossa $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Todistus. Koska $\deg Q \geq 2 + \deg P$, $b_m \neq 0$, niin on olemassa $R_0 > 0$ ja vakio M siten, että

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}, \text{kun } |z| > R_0 .$$

Muodostetaan suljettu polku $\gamma_{[-R,R]} * \Gamma_R$, missä $\Gamma_R(t) = R\exp(it)$, $t \in [0, \pi]$ ja $\gamma_{[-R,R]}$ on janapolku pisteestä $-R$ pisteeseen R, jonka jälki on $[-R, R]$. Kun R on kyllin suuri, niin kaikki navat sisältyvät suljetun polun $\gamma_{[-R,R]} * \Gamma_R$ rajoittamaan alueeseen. Silloin Cauchyn residylauseen nojalla

$$\int_{\gamma_{[-R,R]}*\Gamma_R} f(z)\exp(icz)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f(z)\exp(icz); z_k) .$$

Tulopolun integroimislauseen nojalla

$$\int_{-R}^{R} f(x)\exp(icx)\,dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\exp(icz)dz = \int_{\gamma_{[-R,R]}*\Gamma_R} f(z)\exp(icz)\,dz .$$

Siis Arviolemman avulla, kun $R > R_0$,

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)\exp(icz)\,dz \right| \leq \frac{\pi M}{R} \to 0, \text{ kun } R \to \infty .$$

Siis

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\exp(icx)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f(z)\exp(icz); z_k) .$$

Koska suurilla x

$$|f(x)\exp(icx)| \leq M/x^2 ,$$

niin integraali $\int_{\infty}^{\infty} f(x)\exp(icx)\,dx$ on olemassa, niin väite seuraa. $\square$