KOMPLEKSIANALYYSI I:N JATKOKURSSI

RITVA HURRI-SYRJÄNEN
LUENTO 5.2.2015

6. Residylaskentaa...

6.1. **Residylause.** Olkoon f analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa D lukuunottamatta äärellistä määrää erillisiä erikoispisteitä z_j, $j = 1, \dots, n$, missä $z_j \in D$, kaikilla $j = 1, \dots, n$. Silloin

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f; z_k)\, n(\gamma; z_k)$$

kaikilla suljetuilla paloittain C^1-poluilla γ alueessa D, kun $z_j \notin |\gamma|$, $j = 1, \dots, n$.

7. Määrättyjen integraalien laskemisesta

Tarkastellaan reaalisen integraalin määräämistä tietyissä tapauksissa, joissa integroitavassa funktiossa on trigonometrinen funktio, ja integrointivälin pituus on 2π tai sen monikerta.

Olkoon Q rationaalifunktio, ja tarkastellaan integraalin

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$$

määräämistä. Olkoon $\gamma = \exp(it)$, kun $t \in [0, 2\pi]$. Formaalilla sijoituksella $z = \exp(it)$, $\mathrm{d}z = i\exp(it)\mathrm{d}t$, $t \in [0, 2\pi]$ saadaan

$$\cos t = \frac{1}{2}\left[\exp(it) + \exp(-it)\right] = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right)$$
$$\sin t = \frac{1}{2i}\left[\exp(it) - \exp(-it)\right] = \frac{1}{2i}\left(z - z^{-1}\right),$$

Date: 05022015.

jolloin

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t &= \int_\gamma Q\left(\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right), \frac{1}{2i}\left(z-z^{-1}\right)\right)\mathrm{d}t \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left(Q\left(\frac{(z+z^{-1})}{2}, \frac{(z-z^{-1})}{2i}\right); a_j\right),\end{aligned}$$

missä pisteet a_j ovat funktion Q erillisiä erikoispisteitä yksikköympyrän sisällä.

7.1. **Esimerkki.** Lasketaan integraali

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\cos^3 t + \sin^2 t\right)\mathrm{d}t.$$

Sijoituksen $z = \exp(it)$, $\mathrm{d}z = iz\mathrm{d}t$, $t \in [0, 2\pi]$ avulla saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{iz}Q\left(\frac{(z+z^{-1})}{2}, \frac{(z-z^{-1})}{2i}\right) &= \frac{1}{iz}\left[\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^3 + \left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{iz}\left(\frac{z^3}{8} + \frac{3z}{8} + \frac{3}{8z} + \frac{1}{8z^3} - \frac{z^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4z^2}\right) \\ &= \left(\frac{z^2}{8i} + \frac{3}{8i} + \frac{3}{8iz^2} + \frac{1}{8iz^4} - \frac{z}{4i} + \boxed{\frac{1}{2iz}} - \frac{1}{4iz^3}\right).\end{aligned}$$

Tällä funktiolla on napa origossa, ja residy on $1/(2i)$. Siis

$$I = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

7.2. **Esimerkki.** Määrää

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}.$$

Ratkaisu: Koska

$$\cos t = \frac{1}{2}\big(\exp(it) + \exp(-it)\big),$$

niin sijoituksella $z = \exp(it)$, $dz = i\exp(it)dt$, kun $t \in [0, 2\pi]$, saadaan

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \frac{1}{2}(\exp(it)+\exp(-it))} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4z+1}.\end{aligned}$$

Koska $z^2+4z+1=0$, jos ja vain jos $z=-2\pm\sqrt{3}$, niin $z^2+4z+1=(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})$, ja siis

$$I=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}.$$

Funktiolla

$$f: z\mapsto \frac{1}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}$$

on erikoispisteet $z_1=-2+\sqrt{3}$ ja $z_2=-2-\sqrt{3}$, mutta integrointipolku γ, $\gamma(t)=\exp(it)$, $t\in[0,2\pi]$, kiertää vain pisteen z_1. Siis, koska z_1 on yksinkertainen napa, niin

$$\begin{aligned}
I&=\frac{2}{i}2\pi i\ \mathrm{Res}(f;-2+\sqrt{3})\\
&=4\pi\lim_{z\to-2+\sqrt{3}} f(z)(z+2-\sqrt{3})\\
&=4\pi\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{z+2-\sqrt{3}}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}=4\pi\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

7.3. *Huomautus.* Edellä oleva menetelmä soveltuu vain, jos integroimme yli välin, jonka pituus on 2π tai luvun 2π monikerta. Menetelmä ei sovellu suoraan integraalin

$$I=\int_0^{\pi}\frac{dt}{2+\cos t}$$

määräämiseen. Syy on se, että sijoitus $z=\exp(it)$ johtaa puoliympyrän kehälle, ei suljetulle polulle. Tällöin yksi tapa on hyödyntää integroitavan funktion mahdollista symmetrisyyttä. Funktio

$$g(t)=\frac{1}{2+\cos t}$$

on parillinen, joten

$$I=\int_0^{\pi}\frac{dt}{2+\cos t}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

7.4. **Esimerkki.** Määrää integraalit

$$\begin{aligned}
I_1&=\int_0^{2\pi}\exp(\cos t)\cos(\sin t)\,\mathrm{d}t, \text{ ja}\\
I_2&=\int_0^{2\pi}\exp(\cos t)\sin(\sin t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Olkoon $\gamma(t) = \exp(it)$, kun $t \in [0, 2\pi]$. Residylauseen perusteella

$$\int_\gamma \frac{\exp(z)}{z} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\exp(z)}{z}; 0\right) = 2\pi i.$$

Sijoittamalla $z = \exp(it)$, $\mathrm{d}z = i\exp(it)\mathrm{d}t$, saadaan

$$\int_0^{2\pi} \frac{\exp(\cos t + i \sin t)}{\exp(it)} i \exp(it)\,\mathrm{d}t = 2\pi i \iff$$

$$\int_0^{2\pi} \exp(\cos t)(\cos(\sin t) + i \sin(\sin t))\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

Siis $I_1 = 2\pi$ ja $I_2 = 0$.

Rationaalifunktion integraali yli koko reaaliakselin, kun integroivalla funktiolla on tietyt rajoitteet:

Jos raja-arvot

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 f(x)\,\mathrm{d}x$$

ovat olemassa, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tämän integraalin Cauchyn pääarvo, C.p.a, on puolestaan

$$\text{C.p.a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On tärkeää huomata, että Cauchyn pääarvo voi olla olemassa, vaikka integraalia ei olisi tavallisessa mielessä määritelty.

7.5. **Esimerkki.** Tarkastellaan integraalia

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x.$$

Koska

$$\int_{-R}^{R} x\,\mathrm{d}x = \Big/_{-R}^{R} \frac{1}{2}x^2 = 0,$$

niin

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Kuitenkin

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \int_0^a x\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 x\,\mathrm{d}x = \infty - \infty,$$

jota ei ole määritelty.

7.6. *Huomautus.* Olkoon $\Gamma_R(t) = R\exp(it)$, kun $t \in [0,\pi]$ ja $R > 0$. Oletetaan, että kaikki avoimessa ylemmässä puolitasossa olevat funktion f navat z_k, $k = 1,\dots,p$, ovat polun $\gamma_{[-R,R]} * \Gamma_R$ sisällä ja, että suurilla R on olemassa vakio M siten, että

$$|f(z)| \le \frac{M}{R^2},$$

kun luku z on polun Γ_R jäljellä. Silloin

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f; z_k)\,.$$

Koska

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \le \frac{M\pi R}{R^2} = \frac{\pi M}{R} \to 0\,, \mathrm{kun}\, R \to \infty,$$

niin

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \mathrm{C.p.a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f; z_k)\,.$$

Toisaalta, jos

$$|f(x)| \le \frac{M}{R^2} \quad \forall x,\ \mathrm{kun}\, |x| = R$$

ja funktiolla f ei ole reaalisia napoja, niin reaalianalyysin tietojen perusteella integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ on olemassa ja siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{C.p.a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f; z_k)\,.$$

7.7. *Huomautus.* Ehto

$$|f(z)| \le \frac{M}{R^2} \quad \forall z,\ \mathrm{kun}\, |z| = R$$

toteutuu, jos

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\,,$$

jossa P ja Q ovat polynomeja, joille $\deg Q \ge 2 + \deg P$ ja polynomilla Q ei ole reaalisia nollakohtia.