KOMPLEKSIANALYYSI I:N JATKOKURSSI

RITVA HURRI-SYRJÄNEN
LUENTO 19.2.2015

11. Argumentin periaate

Perusajatus residylaskennan taustalla on, että funktion erilliset erikoispisteet suljetun polun γ jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä määräävät suuressa määrin funktion käyttäytymisen polun jäljellä. Toisaalta myös funktion käyttäytyminen suljetun polun jäljellä auttaa selvittämään funktion singulariteettien ja nollakohtien lukumäärän polun jäljen rajaaman alueen sisällä. *Argumentin periaatteen* mukaan analyyttisen funktion f nollakohtien lukumäärä suljetun polun jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä on yhtä suuri kuin polun $f \circ \gamma$ kierrosluku origon suhteen.

Olkoon γ suljettu yksinkertainen polku, joka kiertää kerran positiiviseen kiertosuuntaan. Olkoon f analyyttinen funktio mahdollisesti lukuunottamatta äärellistä määrää singulariteetteja jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä. Oletetaan, että tunnetaan funktion f arvot polulla, muttei polun jäljen rajaaman alueen sisällä.

<u>Kysymys:</u> Voimmeko tietää jotain funktion f käyttäytymisestä jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä, jos tiedämme funktion käyttäytymisen alueen reunalla?

<u>Muistutus:</u> Jos tiedämme, että funktiolla f ei ole singulariteetteja jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä, ja $\gamma(t) = z_0 + R\exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, niin Cauchyn integraalikaavan mukaan

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_1}\, \mathrm{d}z \quad \forall z_1 \in \mathbb{D}(z_0, R).$$

Tämän perusteella emme kuitenkaan helposti saa selville kuinka monta nollakohtaa tai singulariteettia funktiolla f on jäljen $|\gamma|$ rajaaman

Date: 19022015.

alueen sisällä. Esimerkiksi nollakohtien löytämiseksi pitäisi määrätä z_1 siten, että

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_1}\,\mathrm{d}z = 0.$$

<u>Muistutus:</u> Jos funktiolla f ei ole singulariteetteja jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä, niin

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Siis, jos

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \neq 0,$$

niin funktiolla on <u>ainakin</u> yksi singulariteetti jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä. Lisäksi, jos funktiolla f on äärellinen määrä singulariteetteja z_k, $k = 1, \ldots, p$, jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä, niin residylauseen perusteella voimme määrätä funktion f residyjen summan $\sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}(f(z); z_k)$. Emme kuitenkaan näytä saavan tietoa singulariteettien tai nollakohtien lukumäärästä.

Tarkastellaan funktiota $f'(z)/f(z)$, ja etsitään sen singulariteetit ja niiden residyt. Tällä funktiolla voi olla singulariteetti pisteessä z_0 kahdesta eri syystä:

(1) jos $f(z_0) = 0$ tai
(2) jos funktiolla $f(z)$ ja siten myös funktiolla $f'(z)$ on singulariteetti pisteessä z_0.

Jos funktio f on analyyttinen pisteessä z_0 ja $f(z_0) \neq 0$, niin $f'(z)/f(z)$ on analyyttinen pisteessä z_0 eikä siinä ole singulariteettia. Siis funktion f'/f singulariteetit ovat funktion f nollakohdissa tai singulariteeteissa.

Määrätään funktion f'/f residyt. Olkoon funktiolla $f(z)$ kertalukua m oleva nollakohta pisteessä z_0, jolloin $f(z) = (z - z_0)^m \,\psi(z)$, jossa funktio ψ on kompleksisesti derivoituva pisteen z_0 ympäristössä ja $\psi(z_0) \neq 0$. Tällöin myös $f'(z) = m\,(z - z_0)^{m-1}\,\psi(z) + (z - z_0)^m\,\psi'(z)$, joten funktiolla $f'(z)$ on kertalukua $m-1$ oleva nollakohta pisteessä z_0. Siis funktiolla f'/f on yksinkertainen napa pisteessä z_0. Residy tässä pisteessä on

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f};z_0\right) &= \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)(z-z_0)}{f(z)}\\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{m\,(z-z_0)^m\,\psi(z)+(z-z_0)^{m+1}\,\psi'(z)}{(z-z_0)^m\,\psi(z)}\\
&= \lim_{z\to z_0} m+(z-z_0)\,\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = m.
\end{aligned}$$

Funktion f'/f residy pisteessä z_0 on yhtä suuri kuin funktion f pisteessä z_0 olevan nollakohdan kertaluku.

Olkoon funktiolla f nyt kertalukua m oleva napa pisteessä z_0, jolloin $f(z) = (z-z_0)^{-m}\,\varphi(z)$, jossa funktio φ on kompleksisesti derivoituva pisteen z_0 ympäristössä ja $\varphi(z_0)\neq 0$. Tällöin pätee myös $f'(z) = -m\,(z-z_0)^{-(m+1)}\,\varphi(z)+(z-z_0)^{-m}\,\varphi'(z)$, joten funktiolla $f'(z)$ on kertalukua $m+1$ oleva napa pisteessä z_0. Siis funktiolla f'/f on yksinkertainen napa pisteessä z_0. Residy tässä pisteessä on

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f};z_0\right) &= \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)(z-z_0)}{f(z)}\\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{-m\,(z-z_0)^{-m}\,\varphi(z)+(z-z_0)^{-(m-1)}\,\varphi'(z)}{(z-z_0)^{-m}\,\varphi(z)}\\
&= \lim_{z\to z_0} -m+(z-z_0)\,\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = -m.
\end{aligned}$$

Funktion f'/f residy pisteessä z_0 on yhtä suuri kuin funktion f pisteessä z_0 olevan navan kertaluvun vastaluku.

Poistuvat erikoispisteet ovat napoja, joiden kertaluku on 0 eikä niillä ole residyjä. Jos funktiolla f ei ole oleellisia erillisiä erikoispisteitä jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä, niin residylauseen nojalla

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i(Z-P) \iff (Z-P) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z,$$

jossa Z on funktion f **nollakohtien** lukumäärä jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä ja P on funktion f **napojen** lukumäärä jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä. Molemmat luvut lasketaan kertaluku huomioiden, eli esimerkiksi kertalukua m oleva napa tai nollakohta lasketaan m kertaa.

11.1. *Huomautus.* Jos merkitään $\omega = f(z)$, $\mathrm{d}\omega = f'(z)\,\mathrm{d}z$, niin $\omega \in |f \circ \gamma|$ kun $z \in |\gamma|$ ja

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}.$$

Koska polku γ on suljettu, myös polku $f \circ \gamma$ on suljettu. Funktiolla $1/\omega$ on yksinkertainen napa origossa ja sen residy on 1, joten residylauseen avulla saadaan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = n(f \circ \gamma; 0).$$

11.2. **Argumentin periaate.** Olkoon $|\gamma|$ yksinkertaisen positiivisesti suunnistetun suljetun polun γ jälki. Olkoon funktio f analyyttinen alueessa, johon $|\gamma|$ ja jäljen $|\gamma|$ rajaama alue kuuluvat, lukuunottamatta äärellistä määrää napoja ja nollakohtia jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä. Oletetaan, että funktiolla f ei ole nollakohtia polun γ jäljellä. Tällöin

$$(Z - P) = n(f \circ \gamma; 0),$$

jossa Z on funktion f nollakohtien lukumäärä (laskettuna kertalukuina) jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä, P on funktion f napojen lukumäärä (laskettuna kertalukuina) jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä ja $n(f \circ \gamma; 0)$ on polun $f \circ \gamma$ kierrosluku origon suhteen.

11.3. **Esimerkki.** Funktio $f : z \mapsto z^5$ on analyyttinen koko kompleksitasossa ja sillä on kertalukua 5 oleva nollakohta origossa, mutta ei yhtään singulariteettia. Olkoon $\gamma(t) = \exp(it)$, $0 \le t \le 2\pi$, jolloin funktiolla f on jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä 5 nollakohtaa ja 0 napaa. Toisaalta $(f \circ \gamma)(t) = \exp(5it)$, joten polku $f \circ \gamma$ kiertää origon 5 kertaa positiiviseen kiertosuuntaan, eli $n(f \circ \gamma; 0) = 5$.

11.4. **Esimerkki.** Olkoon $f(z) = z^5 + 2$ ja $\gamma(t) = \exp(it)$, $0 \le t \le 2\pi$. Funktiolla f on viisi nollakohtaa z_k, $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$f(z) = 0 \iff z^5 = -2 \iff z_k = |-2|^{\frac{1}{5}} \exp(\frac{\pi + 2k\pi}{5})$$

$$z_0 = 2^{\frac{1}{5}} \exp(\frac{i\pi}{5}) \qquad z_1 = 2^{\frac{1}{5}} \exp(\frac{3i\pi}{5}) \qquad z_2 = 2^{\frac{1}{5}} \exp(i\pi)$$
$$z_3 = 2^{\frac{1}{5}} \exp(\frac{7i\pi}{5}) \qquad z_4 = 2^{\frac{1}{5}} \exp(\frac{9i\pi}{5}).$$

Nollakohdat z_k ovat kuitenkin jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen ulkopuolella, joten funktiolla f ei ole nollakohtia tai napoja jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä. Koska $(f \circ \gamma)(t) = \exp(5it) + 2$, polku $f \circ \gamma$ on 2-keskeisen 1-säteisen ympyrän kehä kierrettynä 5 kertaa positiiviseen kiertosuuntaan. Siis $f \circ \gamma$ ei kierrä origoa, joten $n(f \circ \gamma; 0) = 0$.