KOMPLEKSIANALYYSI I:N JATKOKURSSI

RITVA HURRI-SYRJÄNEN
LUENTO 26.2.2015

13. Rouchen lauseen sovelluksia

Rouchen lauseen todistus

13.1. **Rouchen lause.** Olkoon $|\gamma|$ positiivisesti suunnistetun yksinkertaisen suljetun polun γ jälki. Olkoot f ja g analyyttisiä alueessa D, johon polun jälki ja jäljen rajaama alue kuuluvat. Jos

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in |\gamma|,$$

niin funktioilla f ja g on sama määrä nollakohtia polun γ jäljen rajaaman alueen sisällä.

Todistus. Argumentin periaatteen mukaan funktion f nollakohtien lukumäärä jäljen $|\gamma|$ rajaamassa alueessa on

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Vastaavasti funktion g nollakohtien lukumäärä jäljen $|\gamma|$ rajaamassa alueessa on

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Havaitaan, että

$$\frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f(z)g'(z) - g(z)f'(z)}{f(z)g(z)} = \frac{(g(z)/f(z))'}{(g(z)/f(z))}.$$

Merkitään $\varphi(z) = g(z)/f(z)$. Nyt funktioiden f ja g analyyttisyyden perusteella myös funktio φ on analyyttinen jäljen $|\gamma|$ ympäristössä. Jos $z \in |\gamma|$, niin

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right| = \left|\frac{g(z) - f(z)}{f(z)}\right| < 1,$$

Date: 26022015.

koska oletuksen mukaan $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ kaikilla $z \in |\gamma|$. Siis polku $(g/f) \circ \gamma$ ei kierrä origoa, joten $n(((g/f) \circ \gamma)(z); 0) = 0$. Tällöin

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(g(z)/f(z))'}{(g(z)/f(z))} \, \mathrm{d}z = 0,$$

mistä väite seuraa. □

13.2. **Korollaari.** *Olkoot f ja g analyyttisiä funktioita suljetun kiekon $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$ ympäristössä. Jos*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z) - a| \quad \forall z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r),$$

niin f ja g saavat arvon $a \in \mathbb{C}$ yhtä monta kertaa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$.

Todistus. Sovelletaan Rouchen teoreemaa. Valitaan polun γ jäljeksi $|\gamma| = \partial^+\mathbb{D}(z_0, r)$. Määritellään funktiot $h_1(z) = f(z) - a$ ja $h_2 = g(z) - a$. Tällöin

$$|f(z) - a - (g(z) - a)| = |h_1(z) - h_2(z)| = |f(z) - g(z)| < |f(z) - a|$$

kaikilla $z \in \partial^+\mathbb{D}(z_0, r)$. □

Seuraava avoimen kuvauksen lause on lause on tärkeä.

<u>Muistutus:</u> Kuvaus f on avoin, kun se kuvaa avoimen joukon avoimeksi joukoksi.

13.3. **Avoimen kuvauksen lause (open mapping theorem).** Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue. Jos $f : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen kuvaus, joka ei ole vakio, niin kuvaus f on avoin.

Todistus. Olkoon $z_0 \in D$ mielivaltaisesti valittu kiinnitetty piste. Osoitetaan, että $f(D)$ sisältää avoimen kiekon, jonka keskipiste on $\omega_0 = f(z_0)$.

Koska f on analyyttinen funktio, joka ei ole vakiofunktio, niin jokaisen pisteen alkukuva on diskreetti. Voidaan valita $r > 0$ siten, että $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset D$ ja $f(z) \neq f(z_0)$, kun $z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)$. Merkitään $\delta = \inf\{|f(z) - \omega_0| : z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)\}$, jolloin $\delta > 0$. Olkoon lisäksi $|\omega_0 - \omega| < \delta/2$.

Soveltamalla edellistä korollaaria funktioihin $f(z)$ ja $g(z) = f(z) + \omega_0 - \omega$ sekä kiekkoon $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$ havaitaan, että funktiot f ja g saavat arvon ω_0 yhtä monta kertaa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$. Erityisesti siis funktio g saa arvon ω_0 ainakin kerran, koska $f(z_0) = \omega_0$.

Valitaan piste $u \in \mathbb{D}(z_0, r)$ siten, että $g(u) = \omega_0$. Silloin $g(u) = \omega_0 = f(u) + \omega_0 - \omega$, eli $f(u) = \omega$. Siis funktio f saa arvon ω ainakin kerran kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$. Väite seuraa, koska piste z_0 oli mielivaltaisesti valittu. $\square$

13.4. **Korollaari.** *Analyyttinen kuvaus f, joka ei ole vakio, kuvaa alueen alueeksi.*

Todistus. Alue on avoin ja yhtenäinen joukko. Edellisen lauseen perusteella tiedämme, että f on avoin. Topologiasta taas tiedämme, että jatkuva kuvaus kuvaa yhtenäisen joukon yhtenäiseksi joukoksi. Koska f on analyyttinen kuvaus, se on jatkuva. Siis f kuvaa avoimen ja yhtenäisen joukon avoimeksi ja yhtenäiseksi joukoksi. $\square$

13.5. **Esimerkki.** Jos funktio f ei ole analyyttinen, sen antama kuva avoimesta joukosta ei välttämättä ole avoin. Merkitään $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, ja tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(x+iy) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ iy & x > 0. \end{cases}$$

Tällöin $f(\mathbb{D}(2,1)) = (-i, i)$, joka ei ole avoin alueessa $\mathbb{C}$.

<u>Muistutus:</u> Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ avoin. Funktiojono $(f_n(z))$ suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa A kohti funktiota $f(z)$, kun $n \to \infty$, jos $(f_n(z))$ suppenee pisteittäin kohti funktiota $f(z)$ ja suppeneminen on tasaista jokaisessa joukon A kompaktissa osajoukossa.

13.6. **Hurwitzin lause.** Olkoon D alue. Olkoot $f_n : D \to \mathbb{C}$ analyyttisiä kuvauksia kaikilla $n \in \mathbb{N}$ siten, että $f_n(z) \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, kun $z \in D$. Jos jono $(f_n(z))$ suppenee lokaalisti tasaisesti alueessa D kohti funktiota $f(z)$, niin silloin joko $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$ tai $f(z) \equiv 0$ kaikilla $z \in D$.

Todistus. Tasaisesta suppenemisesta seuraa, että rajafunktio $f(z)$ on analyyttinen. Oletetaan, että $f(z_0) = 0$ jollakin $z_0 \in D$. Osoitetaan, että tällöin $f(z) \equiv 0$ kaikilla $z \in D$.

<u>Vastaoletus:</u> Piste z_0 on erillinen nollakohta.
Siis on olemassa $r > 0$ siten, että $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset D$ ja $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)$. Silloin $|f(z)|$ saa positiivisen minimiarvon kiekon $\mathbb{D}(z_0, r)$ reunalla. Koska jono $(f_n(z))$ suppenee kohti funktiota $f(z)$ tasaisesti reunalla $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$, niin on olemassa luku n_0 siten, että $|f_{n_0}(z) - f(z)| < |f(z)|$ $\forall z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)$. Rouchen lauseen perusteella funktioilla f_{n_0} ja f on sama määrä nollakohtia kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$. Siis funktiolla f_{n_0} on ainakin yksi nollakohta kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$, mikä on ristiriidassa oletuksen $f_n(z) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ kanssa. $\square$

13.7. **Esimerkki.** Hurwitzin lauseen kumpikin väite on mahdollinen. Tarkastellaan funktioita $f_n(z) = z$ alueessa $A = \mathbb{D}(0,1) \setminus \{0\}$. Selvästi jono $(f_n(z))$ suppenee kohti funktiota $f(z) = z$ lokaalisti tasaisesti alueessa A, ja $f(z) \neq 0$, kun $z \in A$.

Tarkastellaan nyt funktioita $g_n(z) = z/n$ alueessa $B = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tällöin $g_n \to 0$ lokaalisti tasaisesti alueessa B, kun $n \to \infty$. Siis rajafunktiolle g pätee $g(z) = 0$.

Tarkastellaan vielä funktioita $h_n(z) = z^n$ alueessa $A = \mathbb{D}(0,1) \setminus \{0\}$. Olkoon $K \subset A$ kompakti joukko. Tällöin $K \subset \mathbb{D}(0,r)$ jollain $0 < r < 1$, ja siten $|h_n(z)| \leq r^n \; \forall z \in K$. Siis $h_n(z) \to 0$ tasaisesti alueessa K, kun $n \to \infty$. Koska $K \subset A$ oli mielivaltaisesti valittu kompakti joukko, niin $h_n(z) \to h(z) = 0$ lokaalisti tasaisesti alueessa A, kun $n \to \infty$.

13.8. **Lause.** *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue. Olkoot funktiot $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, analyyttisiä injektioita. Jos $f_n \to f$ lokaalisti tasaisesti alueessa D, niin silloin f on joko vakiokuvaus tai injektio alueessa D.*

Todistus. Oletetaan, että f ei ole vakiokuvaus. Valitaan mielivaltaisesti piste $z_0 \in D$. Silloin kuvaus $f(z) - f(z_0)$ ei ole vakiokuvaus alueessa $D \setminus \{z_0\}$ ja $f(z) - f(z_0)$ on raja lokaalisti tasaisesti suppenevalle jonolle $(f_n(z) - f_n(z_0))$ alueessa $D \setminus \{z_0\}$. Koska $f_n(z) - f_n(z_0) \neq 0$ alueessa $D \setminus \{z_0\}$, niin Hurwitzin lauseen perusteella $f(z) - f(z_0) \neq 0$ alueessa $D \setminus \{z_0\}$. Koska z_0 oli mielivaltaisesti valittu, funktio f on injektio alueessa D. $\square$