KOMPLEKSIANALYYSI I:N JATKOKURSSI

RHS
LUENTO 23.1.2015

4. Erillisistä erikoispisteistä ...

4.1. **Esimerkki. Poistuvien erikoispisteiden karakterisaatiolauseen hyödyntäminen:** Olkoon

$$f(z) = \frac{z^2}{(\exp(z)-1)\sin z}, \quad z \neq 0.$$

Käyttämällä eksponentti- ja sinifunktioiden sarjaesityksiä

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

voidaan funktio f kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \frac{z}{\exp(z)-1} \cdot \frac{z}{\sin z} = \frac{1}{1+\frac{z}{2!}+\ldots} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3!}+\ldots},$$

joten nyt

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1+\frac{z}{2!}+\ldots} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3!}+\ldots} = 1.$$

Siis raja-arvo $\lim_{z\to 0} f(z)$ on olemassa ja äärellinen. Tällöin karakterisaatiolauseen nojalla piste $z_0 = 0$ on funktion f poistuva erikoispiste.

4.2. **Karakterisaatio navalle.** Olkoot f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ jollain $R > 0$. Silloin funktiolla f on olemassa kertalukua m oleva napa pisteessä z_0 jos ja vain jos

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = l \neq 0.$$

Todistus. "$\Rightarrow$": Jos funktiolla f on olemassa kertalukua m oleva napa pisteessä z_0, niin

$$(z-z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z-z_0) + \ldots + b_1(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{m+n}.$$

Date: 02022015.

Siis

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) = b_m.$$

Koska funktiolla f on oletuksen mukaan kertaluvun m napa pisteessä z_0, niin $b_m \neq 0$.
"$\Leftarrow$": Olkoot

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) = l \neq 0.$$

Tällöin funktiolla $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ on poistuva erikoispiste pisteessä z_0 (karakterisaatiolause). Tällöin funktiolla g on sarjaesitys

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R \text{ ja } a_0 = l \neq 0.$$

Silloin

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z-z_0)^n,$$

missä $a_0 \neq 0$. Siis funktiolla f on pisteessä z_0 kertalukua m oleva napa. $\square$

4.3. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{1}{\exp(z)-1}.$$

Käyttämällä eksponenttifunktion sarjaesitystä saadaan

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots-1} = \frac{1}{z+\frac{z^2}{2!}+\ldots} \\ &= \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\ldots}. \end{aligned}$$

Siis $\lim_{z\to 0} zf(z) = 1 \neq 0$, joten funktiolla f on ensimmäisen kertaluvun napa origossa.

4.4. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{5z+3}{(1-z)^3 \sin^2 z}, \quad 0 < |z| < 1.$$

Silloin

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = 3 \neq 0,$$

siis funktiolla f on toisen kertaluvun napa origossa.
Olkoon

$$f(z) = \frac{5z+3}{(1-z)^3 \sin^2 z}, \quad 0 < |z-1| < 1.$$

Silloin

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^3 f(z) = \frac{-8}{\sin^2 1} \neq 0,$$

siis funktiolla f on 3. kertaluvun napa pisteessä $z = 1$.

4.5. **Seurauslause.** Jos funktiolla f on kertalukua m oleva napa pisteessä z_0, niin

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Todistus. Merkitään $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$, jolloin

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} |f(z)| &= \lim_{z\to z_0} \left| \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \right| \\
&= \underbrace{\lim_{z\to z_0} |g(z)|}_{=l\neq 0} \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{1}{|z-z_0|^m} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

□

Siis navan lähellä funktion f käyttäytyy melko hyvin. Oleellisen erikoispisteen lähellä käyttäytyminen on villiä.
Oleellisista erikoispisteistä:

4.6. *Huomautus.* Funktiolla f on olemassa oleellinen erikoispiste pisteessä z_0 jos ja vain jos f ei lähesty äärellistä rajaa eikä ääretöntä rajaa, kun $z \to z_0$. Toisinsanoen funktiolla ei ole olemassa raja-arvoa joukossa $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kun $z \to z_0$.

4.7. **Weierstrassin-Casoratin lause.** Jos piste z_0 on funktion f oleellinen erikoispiste, niin f saa jokaisessa pisteen z_0 ympäristössä arvoja mielivaltaisen lähellä annettua lukua. Eli $\overline{f(\mathbb{D} \setminus \{z_0\})} = \mathbb{C}$.

4.8. **Picardin teoreema.** Kompleksisesti derivoituva funktio saa jokaisessa oleellisen erikoispisteen ympäristössä kaikki arvot lukuunottamatta mahdollisesti yhtä arvoa.

4.9. **Esimerkki.** Funktio

$$f(z) = \sin\frac{1}{z}, \quad z \neq 0,$$

saa kaikki arvot punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}(0, r) \setminus \{0\}$ kaikilla $r > 0$.

5. Residylaskentaa

Integroinnista erillisen erikoispisteen ympäri:

Olkoon f funktio, jolla on olemassa erillinen erikoispiste z_0 (eli on olemassa $r > 0$ siten, että f on analyyttinen punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.) Olkoon $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = z_0 + r\exp(it)$.

5.1. **Esimerkki.** Määrää

$$\int_{\gamma_1} \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz.$$

Eksponenttifunktion sarjan avulla

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz &= \int_{\gamma_1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^k}{k!}\right) dz \overset{*}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{k!z^k} \\ &= \int_{\gamma_1} dz + \underbrace{\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}}_{=2\pi i} + \int_{\gamma_1} \frac{dz}{2!z^2} + \ldots \\ &\overset{**}{=} 0 + 2\pi i + 0 + \ldots = 2\pi i.\end{aligned}$$

(*) Summeerauksen ja integroinnin järjestystä voidaan vaihtaa, koska integroitava sarja suppenee tasaisesti.
(**) Jos funktiolla g on olemassa integraalifunktio avoimessa joukossa ja $|\gamma_1| = \partial^+\mathbb{D}(0, 1)$, niin $\int_{\gamma_1} g(z)dz = 0$. Funktiolla $g : z \mapsto \frac{1}{n!z^n}$, $n \geq 2$, on olemassa integraalifunktio, samoin funktiolla $g : z \mapsto 1$ on olemassa integraalifunktio.

<u>Yleisesti:</u> Olkoon f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ jollain $r > 0$. Tällöin funktiolla f on Laurentin sarjaesitys

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Olkoon γ (yksinkertainen) positiiviseen kiertosuuntaan kulkeva polku, jonka rajaaman alueen sisälle jää piste z_0 ja muita erikoispisteitä ei ole. Silloin

$$\int_{\gamma} f(u)du = \int_{\gamma} \frac{a_{-1}}{z - z_0} dz \overset{*}{=} 2\pi a_{-1},$$

koska Laurent-sarjan muilla termeillä on olemassa antiderivaatta (integraalifunktio).
(*) Deformointilause (Kompleksianalyysi I).

Koska a_{-1} on ainoa termi, joka jää jäljelle integroinnin jälkeen, sanomme sitä funktion f residyksi pisteessä z_0 ja merkitsemme $\operatorname{Res}(f; z_0)$. Siis

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_0).$$

5.2. **Esimerkki.** Olkoon

$$\begin{aligned} f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n=0}^{-\infty} \frac{z^n}{(-n)!} \\ &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots \end{aligned}$$

Siis $a_{-1} = 1$, jolloin

$$\operatorname{Res}\left(\exp\left(\frac{1}{z}\right); 0\right) = 1.$$

Residyn laskemisesta/määräämisestä:

(1) Jos funktiolla f on poistuva erikoispiste z_0, niin Laurent-sarjalla ei ole luvun $(z - z_0)$ negatiivisia potensseja. Laurent-sarjassa ei siis ole termiä $(z - z_0)^{-1}$, joten funktion f residy pisteessä z_0 on 0.

(2) Olkoon funktiolla f yksinkertainen napa pisteessä z_0. Silloin Laurent-sarja on muotoa:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Siis

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \dots$$

pisteen z_0 punkteeratussa ympäristössä. Nyt

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = a_{-1}.$$

Residy yksinkertaisessa navassa z_0 on siis

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z).$$

5.3. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{1}{\sin z},$$

jolloin funktiolla f on yksinkertainen napa origossa. Tällöin

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin z}; 0\right) &= \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(3) Jos funktiolla f on toisen kertaluvun napa pisteessä z_0, niin

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

ja

$$(z-z_0)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z-z_0) + a_0(z-z_0)^2 + \dots$$

pisteen z_0 punkteeratussa ympäristössä. Nyt

$$\frac{d}{dz}\left((z-z_0)^2 f(z)\right) \overset{*}{=} a_{-1} + 2a_0(z-z_0) + \dots$$

ja

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left((z-z_0)^2 f(z)\right).$$

(*) Tasaisesti suppeneva sarja voidaan derivoida termeittäin.

(4) Jos funktiolla f on kertaluvun k napa pisteessä z_0, niin induktiolla saadaan kaava

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-z_0)^k f(z)\right).$$

5.4. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3.$$

Nyt

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^3 f(z) = \lim_{z\to 1}(z+1)^3 = 8 \neq 0,$$

joten funktiolla f on pisteessä $z=1$ kolmannen kertaluvun napa. Lasketaan residy tässä pisteessä:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3 f(z)\right) &= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}(z+1)^3 \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\frac{d}{dz}3(z+1)^2 \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\cdot 6(z+1) \\
&= 6.
\end{aligned}$$

Siis $\operatorname{Res}(f;1) = 6$.

5.5. **Esimerkki.** Määrää funktion f,

$$f(z) = \frac{z^2+1}{(z^2-4)(z^4-1)},$$

erilliset erikoispisteet ja residyt näissä pisteissä.

Funktion f erillisten erikoispisteiden ulkopuolella

$$f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z-2)(z^2+1)(z^2-1)} = \frac{1}{(z+2)(z-2)(z+1)(z-1)}.$$

Siis pisteissä $\pm i$ funktiolla f on poistuva erikoispiste ja pisteissä ± 1 ja ± 2 on ensimmäisen kertaluvun napa.
Residyt näissä navoissa:

$$\operatorname{Res}(f; z=1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{(z+2)(z-2)(z+1)} = \frac{1}{6}$$

$$\operatorname{Res}(f; z=-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{1}{(z+2)(z-2)(z-1)} = \frac{1}{6}$$

$$\operatorname{Res}(f; z=2) = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \lim_{z\to 2}\frac{1}{(z+2)(z+1)(z-1)} = \frac{1}{12}$$

$$\operatorname{Res}(f; z=-2) = \lim_{z\to -2}(z+2)f(z) = \lim_{z\to -2}\frac{1}{(z-2)(z+1)(z-1)} = -\frac{1}{12}.$$

5.6. **Historiaa. Felice Casorati** (1835-1890). Hän tunnetaan parhaiten Casorati-Weierstrass teoreemasta.
Charles Emile Picard (1856-1941). Hän todisti 1879 kuuluisan teoreemansa, joka nykyään tunnetaan Picardin teoreemana käyttäen Hermite'n modulaarifunktioita. Picard työskenteli usealla matematiikan alalla menestyksekkäästi. Hän oli myös erinomainen opettaja.