KOMPLEKSIANALYYSI I:N JATKOKURSSI

RHS
LUENTO 22.1.2015

3. Erillisistä erikoispisteistä

3.1. Johdanto.

Jokainen analyyttinen funktio voidaan esittää lokaalisti suppenevana potenssisarjana. Vaikka funktiolla f olisi singulariteettejä eli erikoispisteitä, voidaan se tavallisesti esittää suppenevana Laurentin sarjana

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

jota voidaan myös käyttää tutkittaessa funktion f erillisiä erikoispisteitä.

3.2. **Määritelmä.** Piste z_0 on funktion f *erillinen erikoispiste*, jos f on analyyttinen punkteeratussa avoimessa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ jollakin $r > 0$.

3.3. **Esimerkki.** Funktiolla

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$$

on erillinen erikoispiste $z_0 = 1$, koska pisteen z_0 ympärillä on olemassa punkteerattu kiekko $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1| < 1\} = \mathbb{D}(1, 1) \setminus \{1\}$, jossa funktio f on analyyttinen. Vastaavasti myös piste $z_0 = -2$ on funktion f erillinen erikoispiste.

3.4. *Huomautus.* Laurentin teoreeman perusteella funktio f voidaan esittää Laurentin sarjana erillisen erikoispisteen z_0 ympärillä.

Erilliset erikoispisteet voidaan jakaa kolmeen ryhmään funktion f Laurentin sarjan

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

kertoimien a_n avulla.

Date: 02022015.

(1) **Poistuva erikoispiste**
Jos funktiolla f on erillinen erikoispiste z_0, mutta f voidaan määritellä kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$ analyyttisenä funktiona, sanotaan pisteen z_0 olevan *poistuva erikoispiste*. Jos funktion f Laurentin sarjassa $a_n = 0$ kaikilla $n < 0$, niin asettamalla $f(z_0) = a_0$ saamme funktion f analyyttiseksi koko kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$ ja funktion f Taylorin sarja on

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

3.5. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}, \quad \text{kun } z \neq 0.$$

Pisteen $z = 0$ punkteeratussa ympäristössä on sinifunktion sarjakehitelmän nojalla

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots .$$

Kun asetamme $f(0) = 1$, saamme funktion f, joka on kokonainen eli analyyttinen koko kompleksitasossa.

3.6. **Esimerkki.** Olkoon

$$g(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^2}, \quad \text{kun } z \neq 0.$$

Kosinifunktion sarjakehitelmän

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

nojalla pisteen $z = 0$ punkteeratussa ympäristössä

$$g(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \cdots ,$$

joten määrittelemällä $g(0) = 1/2$, saadaan funktio g, joka on analyyttinen koko kompleksitasossa.

(2) **Napa** (Pole)
Jos vain äärellinen määrä kertoimia $a_n \neq 0$, kun $n < 0$, niin

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \; a_{-m} \neq 0.$$

Pisteen z_0 sanotaan tällöin olevan funktion f *napa* ja navan kertaluku on m.

3.7. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4}, \quad \text{kun } z \neq 0.$$

Silloin

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+5)!}.$$

Funktiolla f on 3. kertaluokan napa pisteessä $z = 0$.

3.8. **Esimerkki.** Olkoon

$$g(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^6}, \quad \text{kun } z \neq 0.$$

Silloin

$$g(z) = \frac{1}{2!z^4} - \frac{1}{4!z^2} + \frac{1}{6!} - \cdots ,$$

ja funktiolla g on 4. kertaluokan napa pisteessä $z = 0$.

(3) **Oleellinen erikoispiste**
Jos $a_n \neq 0$ äärettömän monella indeksillä $n < 0$, niin piste z_0 on funktion f *oleellinen erikoispiste.*

3.9. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{kun } z \neq 0.$$

Silloin

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots$$

ja funktiolla f on oleellinen erikoispiste origossa.

Tarkastellaan seuraavaksi funktion käyttäytymistä erikoispisteen punkteeratussa kiekossa.

3.10. **Lause.** *Olkoon funktio f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ jollain $R > 0$. Silloin z_0 on poistuva erikoispiste, jos ja vain jos funktio f voidaan jatkaa analyyttisenä koko kiekkoon.*

Todistus. Olkoon piste z_0 funkton f poistuva erikoispiste. Silloin poistuvan erikoispisteen määritelmän nojalla

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{kun } 0 < |z - z_0| < R.$$

Asetetaan $f(z_0) = a_0$, jolloin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in \mathbb{D}(z_0, R),$$

ja funktio f on siis analyyttinen koko kiekossa.

Toisaalta, jos f on analyyttinen kiekossa $\mathbb{D}(z_0, R)$, niin funktiolla f on olemassa yksikäsitteinen Taylorin sarja pisteen z_0 ympäristössä U. Laurentin sarjan yksikäsitteisyyden nojalla tämä Taylorin sarja yhtyy funktion f Laurentin sarjaan pisteessä z_0. Siis tässä Laurentin sarjassa ei ole luvun $(z - z_0)$ negatiivisia potensseja, joten piste z_0 on poistuva erikoispiste. $\square$

3.11. **Karakterisaatio poistuvalle erikoispisteelle.** Olkoon f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, R)\setminus\{z_0\}$. Silloin seuraavat väitteet ovat ekvivalentit:

(1) piste z_0 on poistuva erikoispiste
(2) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ on olemassa ja äärellinen
(3) on olemassa luvut $M > 0$ ja $\delta > 0$ siten, että $|f(z)| < M$ kaikilla $z \in \mathbb{D}(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$.

Todistus. On selvää, että ensimmäisestä väitteestä seuraa toinen, ja toisesta seuraa kolmas. Osoitetaan, että kolmannesta väitteestä seuraa ensimmäinen. Oletuksen perusteella on olemassa yksikäsitteinen Laurentin sarja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}.$$

Olkoon $\gamma_r(t) = z_0 + r\exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$ jollain $r \in (0, R)$. Nyt

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)(z - z_0)^{n-1} \mathrm{d}z,$$

ja siis

$$|b_n| \leq \frac{1}{2\pi} M r^{n-1} 2\pi r = M r^n \quad \forall n \geq 1.$$

Kun $r \to 0$, niin $|b_n| = 0\ \forall n \geq 1$, joten z_0 on poistuva erikoispiste.

$\square$

3.12. **Korollaari.** *Jos jollakin indeksillä $k < 0$ kerroin $a_k \neq 0$ funktion f Laurent-sarjassa pisteen z_0 suhteen,niin funktio f on rajoittamaton jokaisessa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, \delta)$, $\delta > 0$.*