KOMPLEKSIANALYYSI I:N JATKOKURSSI

RHS
LUENTO 16.1.2015

2. Laurentin teoreema

Formaalisti **Laurent-sarja** on

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n,$$

missä $a_k \in \mathbb{C}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ ja $z, z_0 \in \mathbb{C}$.

2.1. **Laurentin teoreema.** Olkoon f analyyttinen annuluksessa $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$. Tällöin f voidaan esittää sarjana

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

kaikilla $z \in \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2$.

Jos $\gamma_r(t) = z_0 + r\exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, $R_1 < r < R_2$, niin

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du.$$

<u>Sanonta:</u> Laurentin teoreemassa esiintyvä sarja on funktion f *Laurent-sarja* pisteen z_0 ympärillä alueessa $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$. Sanotaan myös: Laurent-sarja pisteen z_0 suhteen tai Laurent-sarja kehityskeskuksena piste z_0 alueessa $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$.

Laurent-sarjakehitelmä pisteen z_0 suhteen on yksikäsitteinen alueessa $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$.

2.2. **Lemma.** Olkoon f analyyttinen annuluksessa $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, missä $0 \leq r < R \leq \infty$. Olkoon $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho\exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$. Silloin

(1) Integraalin $\displaystyle\int_{\gamma_\rho} f(z)dz$ arvo on riippumaton luvusta $\rho \in (r, R)$.

Date: 02022015.

(2) Jos $r < \rho_1 < \rho_2 < R_2$, niin
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_2}} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z}dw,$$
kunhan $\rho_1 < |z| < \rho_2$.

Todistus: Olkoon $r < \rho_1 < \rho_2 < R$. Merkitään $\sigma = \gamma_{\rho_2} - \gamma_{\rho_1}$, missä $\gamma_{\rho_n} = w + \rho_n \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, $n = 1, 2$. Jos $|w| \geq R$, niin $n(\sigma, w) = 0 - 0 = 0$. Jos $|w| \leq r$, niin $n(\sigma, w) = 1 - 1 = 0$. Siis $n(\sigma, w) = 0$ kaikilla $w \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$. Lisäksi $n(\sigma, w) = 1 - 0 = 1$, kun $\rho_1 < |z| < \rho_2$.
Nyt yleisen Cauchyn integraalikaavan nojalla
$$\int_\sigma f(z)dz = 0 \text{ ja } f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(u)}{u-z}du.$$
Koska $\int_\sigma f(z)dz = \int_{\gamma_{\rho_2}} f(z)dz - \int_{\gamma_{\rho_1}} f(z)dz$, niin $\int_{\gamma_{\rho_2}} f(z)dz = \int_{\gamma_{\rho_1}} f(z)dz$ ja lisäksi
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(u)}{u-z}du = \int_{\gamma_{\rho_2}} \frac{f(u)}{u-z}du - \int_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(u)}{u-z}du, \ \rho_1 < |z| < \rho_2.$$
□

Laurentin lauseen todistus: Olkoon f analyyttinen annuluksessa $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$. Valitaan r, R siten, että $R_1 < r < R < R_2$. Edellisestä lemmasta seuraa, että
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}dw \\ &=: f_1(z) + f_2(z), \quad r < |z| < R, \end{aligned}$$
missä $\gamma_R(t) = z_0 + R\exp(it)$ ja $\gamma_r(t) = z_0 + r\exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Analyyttisillä funktioilla f_1 ja f_2 on Taylorin kehitelmä (Kompleksianalyysi I)
$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ missä } a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}dw.$$
Todistetaan lauseke kertoimille a_n. Voidaan olettaa $z_0 = 0$. (Muutoin tarkastellaan funktiota $g(z) = f(z + z_0)$.) Jos $w \in |\gamma_R|$, niin $|w| = R$, ja siis $\frac{|z|}{|w|} < 1$. Siis geometrisen sarjan avulla
$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w}\frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^n}.$$

Siis

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)z^n}{w^{n+1}}dw$$
$$\stackrel{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw\right)}_{=a_n} z^n.$$

(*): Edellä viimeinen yhtälö pätee, koska integroitava sarja suppenee tasaisesti: f on jatkuva kompaktissa joukossa $\partial\mathbb{D}(0,R)$, joten kaikilla $w \in \partial\mathbb{D}(0,R)$ pätee

$$\left|\frac{f(w)}{w^{n+1}}z^n\right| \leq \frac{M|z|^n}{R^{n+1}}, \quad w \in \partial\mathbb{D}(0,R).$$

Sarja $\sum \frac{z^n}{R^n}$ suppenee geometrisena sarjana, kun $\frac{|z|}{|R|} < 1$, joten Weierstrassin M-testin nojalla sarja $\sum \frac{f(w)z^n}{w^{n+1}}$ suppenee tasaisesti joukossa $\partial\mathbb{D}(0,R)$.

Muokataan funktio f_2 vastaavaan muotoon. Ensin

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{w}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{z^n}, \quad \frac{|w|}{|z|} < 1.$$

Siis

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}dw = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)w^n}{z^{n+1}}dw$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)w^n}{z^{n+1}}dw$$
$$= -\sum_{n=-1}^{-\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\right)}_{=a_n} z^n.$$

Yhdistämällä f_1 ja f_2 ja käyttämällä Lemmaa 2.2 saadaan

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) - f_2(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\right)z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\right)z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\right)z^n. \end{aligned}$$

Siis f on esitetty Laurentin sarjana.

Yksikäsitteisyys: Oletetaan, että on olemassa kaksi Laurentin sarjaa, jotka suppenevat tasaisesti annuluksessa $r \leq |z| \leq R$ ja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n.$$

Integroidaan kumpikin sarja yli polun γ_ρ ($r \leq \rho \leq R$, $\gamma_\rho(t) = \rho \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$) ja sarjan tasaisen suppenemisen nojalla summeerauksen ja integroinnin järjestys voidaan vaihtaa, jolloin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\gamma_\rho} z^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_{\gamma_\rho} z^n dz.$$

Funktiolla $z \mapsto z^n$, $n \neq -1$, on olemassa antiderivaatta (integraalifunktio) $z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$, joukossa $|\gamma_\rho|$, joten funktion $z \mapsto z^n$, $n \neq -1$, integraali yli suljetun polun on 0. Siis jäljelle jää

$$a_{-1} \underbrace{\int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z}}_{=2\pi i} = b_{-1} \underbrace{\int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z}}_{=2\pi i}.$$

Siis $a_{-1} = b_{-1}$. Osoittaaksemme, että muutkin kertoimet ovat samat, kerromme tai jaamme kummankin sarjan luvun z, $z \neq 0$, sopivalla potenssilla ja toistamme edellisen päättelyn. (Esim. jos kerromme molemmat puolet luvulla $z \neq 0$, niin a_{-2} ja b_{-2} eivät katoa, vaan $a_{-2} = b_{-2}$.)

□

2.3. *Huomautus.* Laurentin teoreema osoittaa, että Laurentin sarja on olemassa, mutta se ei anna helppoa kaavaa sarjan kertoimien määräämiseen. Käytännössä yleensä joutuu etsimään Laurentin sarjan kertoimet tilanteeseen sopivalla menetelmällä. Jotkut Laurent-sarjat ovat vaikeita: esimerkiksi Laurentin sarja funktiolle

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) \cos z, \ 0 < |z| < \infty.$$

2.4. **Esimerkki.** (1) $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$,

missä $c_n = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ 1, & n \geq 1 \end{cases}$. Sarja suppenee, kun $0 < |z| < 1$.

(2) $f(z) = \exp(z) + \exp\left(\frac{1}{z}\right)$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C},\ \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,\ \text{missä } c_n = \begin{cases} \frac{1}{m!}, & m \geq 1 \\ 2, & m = 0 \\ \frac{1}{(-m)!}, & m \leq -1 \end{cases}.$$

(3) $f(z) = \dfrac{\exp(2z)}{(z-1)^3}$, $z_0 = 1$, $z - 1 =: u$

$$\begin{aligned} \frac{\exp(2z)}{(z-1)^3} &= \frac{\exp(2)\exp(2u)}{u^3} = \frac{\exp(2)}{u^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2u)^k}{k!} \\ &= \exp(2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k u^{k-3}}{k!} = \exp(2) \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{(n+3)!} u^n \\ &= \exp(2) \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{(n+3)!} (z-1)^n. \end{aligned}$$