KOMPLEKSIANALYYSIN ERIKOISKURSSI 1

RITVA HURRI-SYRJÄNEN
LUENTO 15.1.2015

1. Johdantoa Laurentin sarjoihin

1.1. **Johdantoa Laurentin sarjoihin.**

Jos funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on analyyttinen pisteessä z_0, niin f voidaan kirjoittaa Taylorin sarjana pisteen z_0 ympärillä, eli jossakin pienessä z_0-keskeisessä avoimessa kiekossa. Sarjan suppenemissäde on useimmissa tapauksissa etäisyys pisteestä z_0 lähimpään singulariteettiin.

Nämä Taylorin sarjat "toimivat" hyvin, kun piste z_0 on kaukana kaikista singulariteeteista, mutta ongelmia ilmenee pisteen z_0 siirtyessä lähemmäs singulariteettiä tai itse singulariteettiin.

1.2. **Esimerkki.** Funktio

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

voidaan kirjoittaa Taylorin sarjana pisteen $z_0 = 0$ ympäristössä:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$$

kaikilla $|z| < 1$. Sarjan suppenemissäde on siis $R = 1$.

Pisteen $z_0 = \frac{1}{2}$ ympäristössä saadaan

$$\frac{1}{1-z} = 2\frac{1}{1-2\left(z-\frac{1}{2}\right)} = 2 + 4\left(z - \frac{1}{2}\right) + 8\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots .$$

Sarjan suppenemissäde on $R = \frac{1}{2}$.

Taylorin sarja pisteessä $z_0 = \frac{9}{10}$ on

$$\frac{1}{1-z} = 10\frac{1}{1-10\left(z-\frac{9}{10}\right)} = 10+10^2\left(z-\frac{9}{10}\right)+10^3\left(z-\frac{9}{10}\right)^2+\cdots ,$$

ja sarjan suppenemissäde on $R = \frac{1}{10}$.

Pisteen $z_0 = 1$ ympäristössä ei Taylorin sarjaa ole olemassa lainkaan.

Date: 02022015.

On kuitenkin olemassa toisenlainen sarja, joka suppenee "mielekkäästi" vaikka pisteessä z_0 tai sen lähellä olisi singulariteettejä. Tällainen sarja on **Laurentin sarja**.

Formaalisti Laurentin sarja on vain tuplapotenssisarja, jossa on sekä negatiivisia että positiivisia luvun $(z - z_0)$ potensseja:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

jossa $a_k \in \mathbb{C}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ ja $z, z_0 \in \mathbb{C}$. Erityisesti jokainen Taylorin sarja on Laurentin sarja, mutta ei päinvastoin.

1.3. **Esimerkki.** Tarkastellaan Laurentin sarjaa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \cdots + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} + \cdots .$$

Tässä sarja

$$1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \cdots$$

on Taylorin sarja, joka suppenee kiekossa $\mathbb{D}(0, 2)$. Negatiivisten potenssien sarja

$$\frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} + \cdots$$

voidaan kirjoittaa luvun $\omega = 1/z$ avulla muotoon

$$\frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{4} + \cdots ,$$

ja tämä sarja suppenee, kun $|\omega| < 2$ eli $|z| > 1/2$. Siis annettu Laurentin sarja suppenee annuluksessa $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

On myös olemassa Laurentin sarjoja, jotka eivät suppene missään.

1.4. **Esimerkki.** Tarkastellaan Laurentin sarjaa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|n|} z^n = 1 + 2z + 4z^2 + \cdots + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \cdots ,$$

jossa sarja

$$1 + 2z + 4z^2 + \cdots$$

suppenee, kun $|z| < 1/2$. Koska sarja

$$\frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \cdots$$

suppenee, kun $|z| > 2$, ei ole olemassa sellaista kompleksilukua z, jolla molemmat sarjat suppenisivat, eli annettu Laurentin sarja ei suppene millään luvulla $z \in \mathbb{C}$.

1.5. **Lause.** *Olkoon*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Laurentin sarja. Silloin $\exists$ *luvut* $0 \leq r$ *ja* $R \leq \infty$ *siten, että sarja suppenee itseisesti analyyttiseen funktioon, kun* $r < |z - z_0| < R$ *ja hajaantuu, kun* $|z - z_0| < r$ *tai* $|z - z_0| > R$.

Todistus. Hajottamalla Laurentin sarja potenssisarjoiksi lukujen $(z - z_0)$ ja $1/(z - z_0)$ suhteen. □

1.6. *Huomautus.* Jos $R < r$, niin sarja ei suppene koskaan. Jos taas $r < r' < R' < R$, niin sarja suppenee tasaisesti pienemmässä annuluksessa $\{z : r' \leq |z - z_0| \leq R'\}$.

1.7. *Huomautus.*

(1) Lukua R sanotaan ulkosuppenemissäteeksi ja lukua r sisäsuppenemissäteeksi.
(2) Jokainen funktio, joka on analyyttinen annuluksessa, voidaan esittää Laurentin sarjana.

1.8. **Esimerkki.** Etsitään funktion

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

Laurentin sarja pisteen $z_0 = 0$ ympärillä annuluksessa $1 < |z| < \infty$.

Koska Taylorin sarja

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$$

ei suppene annuluksessa $1 < |z| < \infty$, tarvitaan toinen sarja. Kirjoittamalla funktio $f(z)$ luvun $1/z$ avulla saadaan

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z\left(\frac{1}{z} - 1\right)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}.$$

Koska $|1/z| < 1$, saadaan geometrisen sarjan avulla

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots.$$

Siis sarja

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots$$

on funktion $f(z)$ Laurentin sarja origon ympärillä annuluksessa $1 < |z| < \infty$.

1.9. **Esimerkki.** Etsitään funktion

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(2-z)}$$

Laurentin sarja origon ympärillä. Funktio $f(z)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{(1-z)(2-z)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z},$$

missä

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + \cdots && \text{kun } |z| < 1 \\
\frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots && \text{kun } |z| > 1 \\
\frac{1}{2-z} &= \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} + \cdots && \text{kun } |z| < 2 \\
\frac{1}{2-z} &= -\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} - \frac{4}{z^3} - \cdots && \text{kun } |z| > 2.
\end{aligned}$$

Saadaan siis kolme Laurentin sarjaa:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)(2-z)} &= \frac{1}{2} + \frac{3z}{4} + \frac{7z^2}{8} + \cdots && \text{kun } |z| < 1 \\
\frac{1}{(1-z)(2-z)} &= -\frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \cdots \\
&\quad - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots && \text{kun } 1 < |z| < 2 \\
\frac{1}{(1-z)(2-z)} &= -\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} - \frac{4}{z^3} - \cdots && \text{kun } |z| > 2.
\end{aligned}$$

1.10. **Esimerkki.** Arvioidaan funktiota $f : z \mapsto \exp(1/z)$ origon ympärillä. Koska funktiolla f on singulariteetti origossa, sillä ei ole olemassa Taylorin sarjakehitelmää origon ympärillä. Laurentin sarja annuluksessa $0 < |z| < \infty$ on kuitenkin olemassa. Kun sarjassa

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

luku z korvataan luvulla $1/z$, saadaan

$$\exp(1/z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots,$$

joka on funktion f Laurentin sarja alueessa $0 < |z| < \infty$.

1.11. **Historiaa. Pierre Alphonse Laurent** (1813-1854) Laurentin sarja on nimetty Pierre Laurentin mukaan. Hänen työtään sarjateoriasta noin vuodelta 1843 Ranskan tiedeakatemia ei julkaisuut, vaikka Cauchy suositteli sitä julkaistavaksi. Toisenkin Laurentin työn tiedeakatemia hylkäsi, vaikka Cauchy oli suositellut sen julkaisemista. Työ käsitteli yhden Cauchyn teoreeman laajennusta. Työ katosi ja nykyään se tunnetaan vain Cauchyn raportin kautta. Laurent vaihtoi tutkimusalaa hylkäämisten jälkeen.