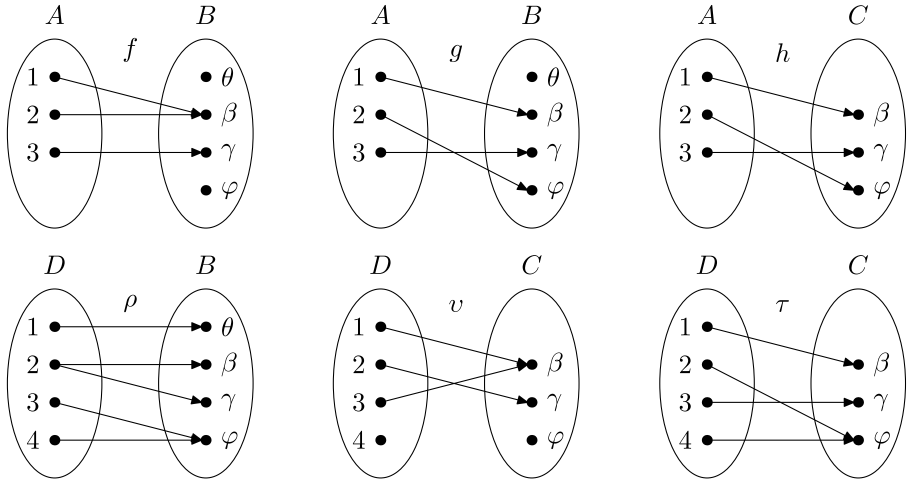
HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan, kevät 2015
Harjoitus 9

Ratkaisut palautettava viimeistään ti 31.3.2015 klo 19.30
Korjaukset palautettava viimeistään ti 21.4.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Seuraavat tehtävät liittyvät luentokalvojen 81-137 asioihin

1. Mitkä alla olevissa kuvissa esiintyvistä säännöistä ovat kuvauksia? Mitkä niistä ovat injektioita? Mitkä niistä ovat surjektioita?



2. Ovatko seuraavat kuvaukset injektioita?

   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $x \mapsto 3x^2 - 4x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $x \mapsto 3 - 2x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $h\colon \mathbb{R} \setminus \{-4\} \to \mathbb{R}$, jolle $x \mapsto \dfrac{2x}{x+4}$ kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

3. Ovatko tehtävän 2 kuvaukset surjektioita?

4. Merkitään $V = \,]0,2[$. Olkoon $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle

$$h(x) = \begin{cases} -x, & \text{jos } x < 1; \\ 2x - 1, & \text{jos } x \geq 1. \end{cases}$$

   Piirrä funktion h kuvaaja ja määritä sen avulla kuva hV sekä alkukuva $h^{\leftarrow}V$.

5. Olkoon $f\colon [-3,2] \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $x \mapsto x^2 - 2$. Olkoon $A = [-3,1]$. Piirrä koordinaatistoon funktion f kuvaaja ja määritä sen avulla

   (a) kuva fA (b) alkukuva $f^{\leftarrow}[fA]$

   (c) alkukuva $f^{\leftarrow}A$ (d) kuva $f[f^{\leftarrow}A]$.

   Piirrä jokainen kohta omaan koordinaatistoonsa!

★ 6. Onko kuvaus $\tau\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle

$$\tau(x) = \begin{cases} -3x-8\,, & \text{jos } x < -2; \\ x\,, & \text{jos } -2 \le x \le 2; \\ 6-2x\,, & \text{jos } x > 2, \end{cases}$$

injektio? Entä surjektio?

Tehtäväsarja II

Seuraavat tehtävät liittyvät luentokalvojen 139–143 asioihin.

7. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to [0,2]$ kuvaus, jolle $f(x) = 2/(x^2+1)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Olkoon $g\colon [0,2] \to [0,2]$ kuvaus, jolle $g(x) = 2-x$ kaikilla $x \in [0,2]$. Määritä seuraavista yhdistetyistä kuvauksista ne, jotka ovat määriteltyjä.

(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$.

★ 8. Oletetaan, että X, Y, Z ovat joukkoja ja $f\colon X \to Y$ sekä $g\colon Y \to Z$ kuvauksia.

(a) Oletetaan, että kuvaukset f ja g ovat injektioita. Osoita, että $g \circ f$ on injektio.
(b) Oletetaan, että kuvaukset f ja g ovat surjektioita. Osoita, että $g \circ f$ on surjektio.

Tehtäväsarja III

Seuraavassa tehtävässä harjoitellaan II induktioperiaatteen käyttöä. Esimerkistä 36 sivulla 119 voi olla apya.

9. Määritellään jono kokonaislukuja rekursiivisesti asettamalla $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ ja $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$, kun $n \ge 1$.

(a) Laske jonon kuusi ensimmäistä lukua.
(b) Osoita II induktioperiaatetta käyttäen, että a_n on pariton kaikilla $n \in \mathbb{N}$; ts. että jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa $z_n \in \mathbb{Z}$, että $a_n = 2z_n + 1$

Kompleksiluvut

Luentokalvoista 71–74 voi olla apua.

10. Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö

(a) $2x^2 + 4x + 3 = 0$
(b) $3x^2 + 12 = 12x$
(c) $2x^2 - 2x + 18 = x^2 + 4x - 40$

11. Oletetaan, että $s \in \mathbb{R}$ ja tarkastellaan yhtälöä $3x^2 + 2sx + 1 = 0$.

(a) Määritä ne reaaliluvut s, joilla tämän yhtälön ratkaisut eivät ole reaalilukuja.
(b) Ratkaise yhtälö a-kohdan tilanteessa kompleksilukujen joukossa.

★ 12. (a) Muodosta tulon nollasäännön avulla reaalilukukertoiminen toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisut ovat

(i) 0 ja 2 (ii) $1-i$ ja $1+i$.

(b) Määritä reaaliluvut a ja b, joilla yhtälön $ax^2 + bx + 1 = 0$ yksi ratkaisu on $1 + 2i$.

Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

Luentokalvoista 111–115 voi olla apua.

★ 13. Laske ja kirjoita perusteluksi vastaava jakoyhtälö:

(i) $10 \bmod 3$ (ii) $140 \bmod 11$ (iii) $-49 \bmod 48$ (iv) $-99 \bmod 33$

14. Kyyhkyslakkaperiaate (Pigeonhole principle) sanoo seuraavaa: jos kyyhkysiä on enemmän kuin pesäkoloja ja jokainen kyyhkynen lentää johonkin pesäkoloon, niin ainakin yhdessä pesäkolossa on ainakin kaksi kyyhkystä. Ratkaise seuraava tehtävä kyyhkyslakkaperiaatetta soveltaen:

    Opiskelijalla A on seitsemän päivää aikaa tehdä JYMin harjoitustehtäviä. Oletetaan, että hän teki yhteensä 10 tehtävää. Tekikö hän silloin varmasti jonakin päivänä 3 tehtävää? Entä tekikö hän varmasti jonakin päivän 2 tehtävää?

15. Osoita, että neljän mielivaltaisen eri kokonaisluvun joukosta voidaan valita kaksi eri numeroa siten, että niiden erotus on jaollinen luvulla 3. Esimerkiksi joukosta $\{1, 2, 3, 4\}$ lukujen 1 ja 4 erotus $1 - 4 = -3$ on jaollinen luvulla 3. Vastaavasti joukosta $\{-25, 400, 2015, 3000\}$ lukujen -25 ja 2015 erotus $-25 - 2015 = -2040$ on jaollinen luvulla 3.

    Vihje: Kyyhkyslakkaperiaate sekä jakojäännös.

    Vapaaehtoinen lisäkysymys: Olkoon $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Osoita, että $n + 1$ mielivaltaisen eri kokonaisluvun joukosta voidaan valita kaksi eri numeroa siten, että niiden erotus on jaollinen luvulla n.