HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan, kevät 2015
Harjoitus 4

Ratkaisut palautettava viimeistään ti 17.2.2015 klo 19.30
Korjaukset palautettava viimeistään ti 10.3.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Vastaa kurssin ohjaukseen liittyvään kyselylomakkeeseen osoitteessa

https://elomake.helsinki.fi/lomakkeet/58343/lomake.html.

Tehtäväsarja II

Seuraavat tehtävät liittyvät komplementtiin.

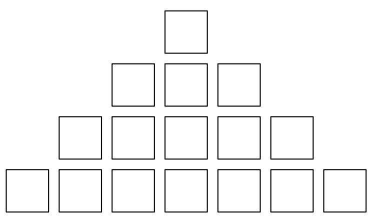
2. Oletetaan, että X on joukko ja $A \subset X$.
   (a) Oletetaan, että $X = \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 < 38\}$ ja $A = \{x \in X \mid x^2 \geq 16\}$. Määritä $\complement A$.
   (b) Oletetaan, että $A = \{-2, -1, 0\}$ ja $\complement A = \{1, 2\}$. Määritä X.
   (c) Oletetaan, että $X = \{\pi, \sqrt{19}, \{0, 1\}\}$ ja $\complement A = \{\{0, 1\}\}$. Määritä A.
3. Oletetaan, että X on joukko ja $A \subset X$. Määritä $\complement A$ kun
   (a) $X = \mathbb{N}$ ja $A = \{x \in X \mid x \neq 0 \text{ ja } x \neq 1\}$
   (b) $X = \mathbb{N}$ ja $A = \{x \in X \mid x \neq 0 \text{ tai } x \neq 1\}$

   Vihje: pohdi ensin mikä joukko A on.
4. Sama kuin edellinen tehtävä mutta $X = \mathbb{R}$.

Tehtäväsarja III

Seuraavissa tehtävissä harjoitellaan muun muassa induktiotodistusta

5. Puutarhaan halutaan rakentaa kolmiota muistuttava terassi neliön muotoisista laatoista. Kolmio muotoillaan niin, että ensimmäiseen riviin tulee 1 laatta, toiseen riviin 3 laattaa, kolmanteen riviin 5 laattaa ja niin edelleen (ks. kuva). Oletetaan, että k, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.



   (a) Muodosta lauseke, joka kertoo, kuinka monta laattaa on laatoituksen rivillä k.
   (b) Muodosta a-kohdan lauseketta apuna käyttäen summa, joka kertoo, kuinka monta laattaa terassin tekemiseen tarvitaan yhteensä, jos laatoitus muodostuu n rivistä.
6. (Bernoullin epäyhtälö) Oletetaan, että $x \in \mathbb{R}$ ja $x > -1$. Osoita induktiota käyttäen, että tällöin
$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$
kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Missä tarvitset oletusta $x > -1$?

Tehtäväsarja IV

Seuraavissa tehtävissä harjoitellaan "jos..., niin ...-tyyppisten väitteiden todistamista sekä väitteen kumoamista vastaesimerkin avulla. Luentojen kalvoista 44 ja 60 voi olla apua.

7. Todista tai kumoa seuraavat väitteet:
   (a) Jos $m, n \in \mathbb{Z}$, niin $mn > m(n-1)$
   (b) Jos $a, b \in \mathbb{R}$, niin $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Vihje b-kohtaan paperin alalaidassa[1].
8. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$ missä $a > -3$. Osoita, että jos $ab + 3b < 0$, niin $b < 0$. Päteekö väite jos oletetaankin, että $a \leq -3$?
9. Oletetaan, että A, B ja C ovat joukkoja. Osoita, että jos $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$, niin $A \cap C \subset B$.

Tehtäväsarja V

Seuraavissa tehtävissä harjoitellaan muun muassa kahden joukon osoittamista samaksi sekä joukon osoittamista toisen joukon osajoukoksi. Luentojen kalvoista 42–46 ja 51 voi olla apua.

10. Osoita, että joukon X osajoukoille A ja B on voimassa toinen ns. de Morganin laki
$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B\,.$$

★ 11. Oletetaan, että A ja B ovat joukkoja. Osoita, että jos $A \cap B = A$, niin $A \subset B$.

Tehtäväsarja VI

Kirjoita alla olevan tehtävän 12 ratkaisu *eri paperille kuin muut ratkaisut.* Nido paperi kuitenkin yhteen muiden ratkaisujen kanssa siten, että se tulee *viimeiseksi sivuksi.* Muista myös kirjoittaa paperiin kurssitunnuksesi. Opiskelijoiden ratkaisut tähän tehtävään kerätään talteen, ja niitä käytetään aineistona kielentämistä käsittelevässä pro gradu -tutkielmassa. Lisäpisteiden kannalta tämä tehtävä vastaa kahta tavallista tehtävää.

12. Oletetaan, että A ja B ovat joukkoja, ja tarkastellaan väitettä
$$(A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A) = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B).$$
   (a) Selitä väitteen sisältö suomen kielellä.
   (b) Alla on esitetty yksi todistusluonnos yllä mainitulle väitteelle. Täydennä ratkaisu lisäämällä tarvittavat välivaiheet ja perustelut sekä loppupäätelmät.
   Todistus: Oletetaan, että $x \in (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$. ...

   – ... Tällöin $x \in A$ ja $x \notin B$. ... Siis $x \in (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$.
   – ... Tällöin $x \in B$ ja $x \notin A$. ... Siis $x \in (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$.

   Oletetaan, että $x \in (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$. ... ...

   – Oletetaan, että $x \in A$. ... Siten $x \in A \smallsetminus B$. ...
   – ... ...

   Siis $x \in \ldots$
   (c) Keskustelitko tästä tehtävästä ohjaajan kanssa?

[1] $(a-b)^2$

Kompleksiluvut

Seuraavat tehtävät liittyvät kompleksilukuja käsitteleviin luentokalvoihin 25–40.

13. (a) Tarkastellaan alla näkyvää päättelyä. Onko se oikein? Mitä sen perusteella voidaan sanoa yhtälön $|3x+1| = 2x$ ratkaisuista?

$$|3x+1| = 2x \Rightarrow (3x+1)^2 = (2x)^2 \Rightarrow 9x^2+6x+1 = 4x^2$$
$$\Rightarrow 5x^2+6x+1=0 \Rightarrow x=-1 \text{ tai } x = -\frac{1}{5}.$$

(b) Tarkastellaan alla näkyvää päättelyä. Onko se oikein? Mitä sen perusteella voidaan sanoa yhtälön $|3x+1| = 2x$ ratkaisuista?

$$x=-1 \text{ tai } x=-\frac{1}{5} \Rightarrow 5x^2+6x+1=0 \Rightarrow 9x^2+6x+1=4x^2$$
$$\Rightarrow (3x+1)^2 = (2x)^2 \Rightarrow |3x+1| = 2x.$$

14. Ratkaise edellisessä tehtävässä tarkasteltu yhtälö $|3x+1| = 2x$ reaalilukujen joukossa. Kuinka monta ratkaisua sillä on?

★ 15. Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö

(a) $(2-i)z = (1+i)+iz$ (b) $(2+3i)z + \overline{1-i} = z\,.$

Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

Seuraavat tehtävät liittyvät tietojenkäsittely- ja tilastotieteen matematiikan luentokalvoihin 31–46.

16. Onko lukujono geometrinen, jos se alkaa seuraavasti:

(a) $1/3,\ 2/5,\ 3/7,\ 4/9,\ \ldots$ (b) $4,\ 8/3,\ 16/9,\ 32/27,\ \ldots$

Myönteisessä tapauksessa laske jonon kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

17. Oletetaan, että $a,\ q \in \mathbb{R}$ ja $q \neq 1$. Oletetaan, että $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Osoita induktiolla, että geometrisen sarjan n:s osasumma eli n ensimmäisen termin summa on

$$\sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}\,.$$

★ 18. Oletetaan, että Annan kuukausipalkka on 3000 euroa vuonna 2015. Joka vuosi hän saa palkankorotuksen, jonka suuruus on 150 euroa sekä lisäksi 5 % edellisen vuoden kuukausipalkasta.

(a) Olkoon $p_0 = 3000$ vuoden 2015 kuukausipalkka euroina. Muodosta rekursioyhtälö, joka kertoo, miten seuraavan vuoden kuukausipalkka p_{n+1} riippuu edellisen vuoden kuukausipalkasta p_n.

(b) Muodosta luvusta n riippuva lauseke, jolla voi laskea Annan kuukausipalkan n vuoden kuluttua vuodesta 2015. Kirjoita lauseke ilman summamerkintää hyödyntäen edellisen tehtävän tulosta.

(c) Mikä on Annan kuukausipalkka vuonna 2020?