HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan, kevät 2015
Harjoitus 3

Ratkaisut palautettava viimeistään ti 10.2.2015 klo 19.30
Korjaukset palautettava viimeistään ti 24.2.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Seuraavissa tehtävissä harjoitellaan induktiotodistusta ja summamerkinnän käyttöä. Luentokalvoista 24–33 voi olla apua.

1. Osoita induktiolla, että $4^n + 6n - 1$ on jaollinen luvulla 9 kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

2. Laske seuraavat summat:

$$(i) \quad \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i+3} \qquad (ii) \quad \sum_{m=3}^{6} (-1)^m m^2 \qquad (iii) \quad \sum_{n=1}^{100} n^2 + \sum_{k=3}^{99} (-k^2)$$

Tehtäväsarja II

Seuraavat tehtävät liittyvät perusjoukon ja komplementin käsitteisiin. Luentokalvoista 55–59 voi olla apua.

3. Olkoon $X = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n < 10 \,\}$. Tarkastellaan joukon X osajoukkoja $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Määritä joukot

$$\text{(a)} \ \complement A \qquad \text{(b)} \ \complement B \qquad \text{(c)} \ \complement(A \cup B) \qquad \text{(d)} \ \complement A \cap \complement B\,.$$

4. Tarkastellaan joukon $\mathbb{Z}$ osajoukkoja $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Määritä joukot

$$\text{(a)} \ \complement A \qquad \text{(b)} \ \complement B \qquad \text{(c)} \ \complement(A \cap B) \qquad \text{(d)} \ \complement A \cup \complement B\,.$$

5. Olkoon $A = \{1, 2, 5, 7\}$. Määritä joukko $\complement A$ tai perustele, miksi sitä ei voi määrittää.

Tehtäväsarja III

Seuraavissa tehtävissä harjoitellaan erilaisia todistustekniikoita. Luentokalvoista 42–54 voi olla apua.

6. Tutki Vennin kaavioiden avulla, kumpi seuraavista yhtälöistä näyttäisi pätevän yleisesti:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,.$$

7. Osoita vastaesimerkin avulla, että toinen tehtävän 6 yhtälöistä ei päde yleisesti.

★ 8. Osoita, että toinen tehtävän 6 yhtälöistä pätee yleisesti[1].

[1] Muista, että joukkojen identtisyys saadaan todistettua päättelemällä sisältyminen molempiin suuntiin.

Tehtäväsarja IV

Kirjoita alla olevan tehtävän 9 ratkaisu *eri paperille kuin muut ratkaisut.* Nido paperi kuitenkin yhteen muiden ratkaisujen kanssa siten, että se tulee *viimeiseksi sivuksi.* Muista myös kirjoittaa paperiin kurssitunnuksesi. Opiskelijoiden ratkaisut tähän tehtävään kerätään talteen, ja niitä käytetään aineistona kielentämistä käsittelevässä pro gradu -tutkielmassa. Lisäpisteiden kannalta tämä tehtävä vastaa kahta tavallista tehtävää.

9. Sanotaan, että kokonaisluku z on *jaollinen kokonaisluvulla* a, jos on olemassa $b \in \mathbb{Z}$, jolla $z = ab$. Esimerkiksi luku 12 on jaollinen luvulla 4, sillä $12 = 4 \cdot 3$, missä $3 \in \mathbb{Z}$.

   (a) Alla on esitetty yksi ratkaisuluonnos tehtävälle ”osoita induktiolla, että $6^n - 1$ on jaollinen luvulla 5 kaikilla $n \in \mathbb{N}$”. Täydennä ratkaisu lisäämällä puuttuvat kohdat, tarvittavat välivaiheet ja perustelut sekä johtopäätös.

   Ratkaisu:

$$\ldots$$

$$6^0 - 1 = 0 = 0 \cdot 5$$

$$\ldots$$

$$6^{k+1} - 1 = 6 \cdot 6^k - 1 = 6 \cdot (5m + 1) - 1 = \cdots = 5 \cdot (6m + 1).$$

   (b) Keskustelitko tästä tehtävästä ohjaajan kanssa?

Kompleksiluvut

10. Oletetaan, että $z, w \in \mathbb{C}$. Osoita, että $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

11. Laske (eli sievennä muotoon $a + bi$, missä $a,\ b \in \mathbb{R}$).

   (a) $\overline{(4i-3)(6-2i)}$ (b) i^7 (c) $(1+6i)^{-1}$.

★ 12. Laske (eli sievennä muotoon $a + bi$, missä $a, b \in \mathbb{R}$)

   (i) $\dfrac{7+2i}{3-i}$ (ii) $\dfrac{(1+i)(1-i)}{(2+i)^2}$ (iii) $\dfrac{2i-3}{3i} - (3+2i)^{-1}$

Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

13. Kirjoita seuraavat väitteet kvanttorien avulla. Esimerkistä 4 voi katsoa mallia.

   (a) $A \cup B = \emptyset$.

   (b) Jos $A \not\subset B$, niin $A \neq \emptyset$.

   (c) $A \setminus A \neq \emptyset$, jos ja vain jos $\emptyset \not\subset A$.

★ 14. Tämän tehtävän väitteet koskevat reaalilukuja. Muodosta niiden negaatioiden kanssa loogisesti ekvivalentit väitteet, joissa ei esiinny negaatiosymbolia $\neg$. Kumpi on tosi, väite vai sen negaatio?

(a) $\forall x(|x| > 0)$

(b) $\exists x(x = 1 \to x^2 < 0)$

(c) $\forall x \exists y(xy = 1 \vee x = 0)$

(d) $\exists x \forall y(x - y = 0)$

15. Tässä tehtävässä $T(x, y)$ tarkoittaa "x tuntee y:n". Kirjoita seuraavat kurssin opiskelijoita koskevat väitteet kvanttorien ja loogisten konnektiivien avulla (tarvitset ehkä myös merkkiä $\neq$).

(a) Kaikki opiskelijat tuntevat jonkun opiskelijan.

(b) Kaikki opiskelijat tuntevat jonkun *toisen* opiskelijan.

(c) Joku opiskelijoista ei tunne kaikkia opiskelijoita.

(d) Kaksi eri opiskelijaa tuntevat kaikki opiskelijat.