

**HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Johdatus yliopistomatematiikkaan, kevät 2015**  
**Harjoitus 2**

Ratkaisut palautettava viimeistään ti 3.2.2015 klo 19.30  
Korjaukset palautettava viimeistään ti 17.2.2015 klo 19.30

**Tehtäväsarja I**

Seuraavissa tehtävissä harjoitellaan matemaattisten merkintöjen lukemista ja käyttämistä. Luentokalvoista 2–6, 11–14 ja 25 voi olla apua.

1. Selitä suomen kielellä, mitä seuraavat väitteet tarkoittavat.

(a)  $m \in \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ on jaollinen luvulla } 2\}$       (b)  $a + b \notin \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$ .

2. Selitä, mikä ero on joukoissa  $\emptyset$  ja  $\{\emptyset\}$ . Entä mikä ero on joukoissa  $\mathbb{N}$  ja  $\{\mathbb{N}\}$ ?  
3. Laske seuraavat summat, jos mahdollista. Jos summaa ei voi laskea, kirjoita sen lauseke ilman summamerkintää  $\Sigma$ .

(i)  $\sum_{i=0}^3 2i$       (ii)  $\sum_{k=2}^6 (k+1)$       (iii)  $\sum_{n=1}^{10} 2$       (iv)  $\sum_{j=0}^n j(j+2)$

**Tehtäväsarja II**

Seuraavat tehtävät liittyvät joukkojen yhdisteen, leikkauksen ja erotuksen käsitteisiin sekä joukkojen havainnollistamiseen Vennin kaavioiden avulla. Luentokalvoista 20–22 voi olla apua.

4. Tarkastellaan joukkoja  $A = \{1, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 3, 7, 9\}$  ja  $C = \{2, 5, 7\}$ . Määritä

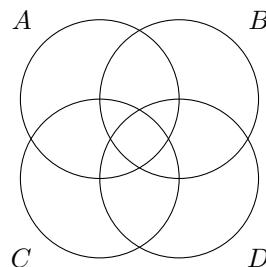
(a)  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$       (b)  $(B \cup C) \setminus A$       (c)  $B \cup (C \setminus A)$ .

5. Joukkojen  $A$  ja  $B$  *symmetrinen erotus* tarkoittaa joukkoa  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Sille käytetään merkintää  $A \Delta B$ . Piirrä Vennin kaavio joukosta  $A \Delta B$ .

6. Vennin kaaviot ovat hyvä apuväline joukkojen koskevien väitteiden hahmottamiseen, mutta joukkojen määrän kasvaessa niiden piirtäminen käy vaikeammaksi. Mitä voit esimerkiksi viereisen kaavion perusteella päätellä joukosta

$(A \cap D) \setminus (B \cup C)$ ?

Päteekö tämä yleisesti?



### Tehtäväsarja III

Seuraavissa tehtävissä harjoitellaan erilaisia todistustekniikoita. Luentokalvoista 11, 15-17 sekä 24-28 voi olla apua.

7. Merkitään  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = e^x\}$  ja  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (e^x - \sin x)(3x^2 - \cos x) = 0\}$ . Osoita, että  $A \subset B$ .

8. Tarkastellaan väitettä "jos  $A \in B$  ja  $B \notin C$ , niin  $A \notin C$ ". Osoita, että väite ei päde yleisesti keksimällä esimerkki joukoista  $A$ ,  $B$  ja  $C$  joille väite ei päde. Keksi myös esimerkki joukoista  $A$ ,  $B$  ja  $C$  joille väite pätee.

★ 9. Osoita induktiolla, että kaikilla  $n \in \mathbb{N}$  pätee  $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ .

10. Osoita induktiolla, että  $n^3 - n$  on jaollinen luvulla 3 kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ .

### Tehtäväsarja IV

Seuraavat tehtävät liittyvät alkion ja osajoukon käsitteisiin

★ 11. Olkoon  $A = \{1, \{1, 6\}, 4, \{3, 5\}, \{6\}\}$ . Mitkä seuraavista väitteistä ovat totta? Mitkä ovat epätosia? Muista perustella omin sanoin.

- |                           |               |                       |                                 |
|---------------------------|---------------|-----------------------|---------------------------------|
| (a) $\emptyset \in A$     | (b) $4 \in A$ | (c) $\{4\} \subset A$ | (d) $\{1, 4, \{6\}\} \subset A$ |
| (e) $\emptyset \subset A$ | (f) $6 \in A$ | (g) $\{6\} \subset A$ | (h) $\{\{6\}\} \subset A$ .     |

12. Luettele joukon  $A$  kaikki osajoukot, jos

- |                    |                               |
|--------------------|-------------------------------|
| (a) $A = \{0, 1\}$ | (b) $A = \{\emptyset, 0, 1\}$ |
|--------------------|-------------------------------|

### Tehtäväsarja V

Kirjoita alla olevan tehtävän 13 ratkaisu *eri paperille kuin muut ratkaisut*. Nido paperi kuitenkin yhteen muiden ratkaisujen kanssa siten, että se tulee *viimeiseksi sivuksi*. Muista myös kirjoittaa paperiin kurssitunnukseksi. Opiskelijoiden ratkaisut tähän tehtävään kerätään talteen, ja niitä käytetään aineistona kielentämistä käsittelevässä pro gradu -tutkielmassa. Lisäpisteiden kannalta tämä tehtävä vastaa kahta tavallista tehtävää.

13. (a) Selitä suomen kielellä ilman matemaattisia symboleita, mitä seuraavat väitteet tarkoittavat. Ainoat sallitut matemaattiset symbolit ovat numeromerkit sekä merkit  $a$ ,  $s$  ja  $t$ .

- i.  $a \in \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2015\}$       ii.  $s - t \notin \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 4k, \text{ missä } k \in \mathbb{Z}\}$ .

(b) Keskustelitko tästä tehtävästä ohjaajan kanssa?

## Kompleksiluvut

14. Määritä kompleksiluvun  $z = i(1 - i) - (1 - i)^2$

- (a) reaaliosa  $\operatorname{Re} z$  (b) imaginaariosa  $\operatorname{Im} z$   
(c) itseisarvo eli moduli  $|z|$  (d) liittoluku  $\bar{z}$ .

15. (a) Oletetaan, että  $z, w \in \mathbb{C}$ . Osoita, että  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ .

(b) Millainen kuvio muodostuu kompleksitasoon niistä pisteistä  $z$ , jotka toteuttavat yhtälön  $|z + 1 + 2i| = |z - 3|$ .

★ 16. Määritä ne reaaliluvut  $a$ , joilla lauseke  $(2 + ai)(a - 3i) + (a + i)(a - i)$  on

- (a) reaalinen.  
(b) puhtaasti imaginaarinen.

## Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

17. Tulkitse seuraavat luonnollisia lukuja koskevat väitteet suomen kielelle ja päättele, ovatko ne tosia vai epätosia.

- (a)  $\forall x \exists y (y - 2x = 0)$  (b)  $\exists y \forall x (y - 2x = 0)$   
(c)  $\forall x \exists y (x - 2y = 0)$  (d)  $\forall x (x < 10 \rightarrow \forall y (y < x \rightarrow y < 9))$ .

18. Tässä tehtävässä  $K(x)$  tarkoittaa " $x$  tekee kotitehtäviä" ja  $L(x)$  tarkoittaa " $x$  lukee luentomuistiinpanoja". Kirjoita seuraavat kurssin opiskelijoita koskevat väitteet kvanttorien ja loogisten konnektiivien avulla.

- (a) Joku tekee kotitehtäviä ja lukee luentomuistiinpanoja.  
(b) Kukaan ei tee kotitehtäviä eikä lue luentomuistiinpanoja.  
(c) Kaikki tekee kotitehtäviä mutta kukaan ei lue luentomuistiinpanoja.  
(d) Kaikki ne jotka eivät lue muistiinpanoja eivät myöskään tee kotitehtäviä.

★ 19. Muodosta seuraavien väitteiden negaation kanssa loogisesti ekvivalentit väitteet, joissa ei esiinny negaatio-symbolia  $\neg$ . Muita konnektiiveja sekä symboleita  $\in$  ja  $\notin$  saa käyttää. Kumpi on tosi, väite vai sen negaatio?

- (a)  $0 \in \mathbb{N} \vee 1 \in \mathbb{R}$   
(b)  $1/2 \in \mathbb{N} \wedge 1/2 \in \mathbb{Q}$   
(c)  $1/2 \in \mathbb{N} \rightarrow 1/2 \in \mathbb{Q}$   
(d)  $-2 \in \mathbb{N} \leftrightarrow \pi \in \mathbb{Q}$