HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan, kevät 2015
Harjoitus 12

Ratkaisut palautettava viimeistään ti 28.4.2015 klo 19.30
Korjaukset palautettava viimeistään ti 28.42015 klo 19.30

$\star$ Viikolla 18 (27.4-3.5) ei luentoja mutta ohjausta on normaaliin tapaan.

$\star$ 2. kurssikoe on 4.5. klo 10-12.

Ota yhteyttä luennoitsijaan jos
− et pysty osallistumaan kurssikokeeseen sairastumisen tai päällekkäisen tentin vuoksi, viimeistään kurssikoetta seuraavana päivänä 5.5.
− olet oikeutettu lisäaikaan esim. todennetun lukihäiriön vuoksi tai jos tarvitset muita poikkeusjärjestelyitä.
− et ole kirjoittanut 1.kurssikoetta tai et saanut kurssin läpäisemiseen tarvittavat 8 pistettä 1.kurssikokeesta mutta haluat yrittää kurssin läpäisemistä.

Tehtäväsarja I

Seuraavat tehtävät ovat kurssin loppuosan kertaustehtäviä.

1. Määritä $f\{0,1,2\}$ ja $f^{\leftarrow}\{-1,0,4\}$ kun $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(n)=n^2-1$. Onko f injektio? Onko se surjektio?

2. Määritellään jono kokonaislukuja $(a_0,a_1,a_2,\ldots)$ rekursiivisesti asettamalla $a_0=1$, $a_1=8$ ja $a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}$, kaikilla $n\geq 1$. Osoita II induktioperiaatetta käyttäen, että $a_n=3\cdot 2^n+2\cdot(-1)^{n+1}$ kaikilla $n\in\mathbb{N}$.

3. Määritä kuvauksen f käänteiskuvaus tai perustele, että sitä ei ole olemassa kun

   (a) $f:[2,\infty[\to[-1,\infty[$, $f(x)=(x-2)^2-1$.
   (b) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=n^2-n$.

4. Bittijono tarkoittaa nollista ja ykkösistä muodostettua jonoa. Olkoon B_5 kaikkien viiden merkin pituiset bittijonot. Esimerkiksi $01010\in B_5$, $11100\in B_5$ ja $10001\in B_5$. Tarkastellaan joukon B_5 relaatiota $T=\{(a,b)\in B_5\times B_5 \mid \text{a:ssa ja b:ssä on yhtä monta ykköstä}\}$. Osoita, että T on ekvivalenssirelaatio. Mitkä bittijonot kuuluvat luokkaan $[00010]_T$? Entä mitkä luokkaan $[01010]_T$? Kuinka monta eri alkiota joukossa B_5/T on?

Tehtäväsarja II

Seuraavissa tehtävissä tulee ilmi ekvivalenssiluokkien erittäin hyödyllinen ominaisuus, nimittäin että ne muodostavat perusjoukon osituksen.

Joukon X *ositus* tarkoittaa kokoelmaa joukon X osajoukkoja A_i, jotka ovat epätyhjiä, erillisiä ja joiden yhdiste on joukko X. Toisin sanottuna $A_i\neq\emptyset$ kaikilla i, $A_i\cap A_j=\emptyset$ kaikilla $i\neq j$ ja $\bigcup_i A_i=X$.

5. Mitkä seuraavista kokoelmista ovat joukon $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ osituksia?

   (a) $\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$
   (b) $\{\{1,2,3\},\{3,4,5,6\}\}$
   (c) $\{\{1,4,6\},\{2,3\},\{5\}\}$
   (d) $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

6. Oletetaan, että $\sim$ on joukon A ekvivalenssirelaatio. Oletetaan, että $a, b, \in A$. Todista seuraavat väitteet:

   (a) $a \in [a]_\sim$.
   (b) $a \in [b]_\sim$ jos ja vain jos $[a]_\sim = [b]_\sim$.

7. Oletetaan, että $\sim$ on joukon A ekvivalenssirelaatio. Todista edellisen tehtävän tuloksia hyödyntäen, että ekvivalenssirelaation $\sim$ ekvivalenssiluokkien joukko $A/\sim$ on joukon A ositus.

Kompleksiluvut

8. Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö

$$(i) \quad z^4 = -4 + 4\sqrt{3}i \qquad (ii) \quad z^6 - (3+3i)z^2 = 0$$

9. Määritellään joukon $\mathbb{C}$ relaatio $\sim$ seuraavasti: $z \sim w$, jos $|z|^2 - |w|^2 = 2\operatorname{Re} z - 2\operatorname{Re} w$. Osoita, että relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Havainnollista kompleksitasossa ekvivalenssiluokkia $[3]_\sim$ ja $[2+2\sqrt{2}i]_\sim$. Vihje[1]

10. Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö

$$(i) \quad (1 - i\sqrt{3})(z-2i)^2 = 8 \qquad (b) \quad (z-5)^8 = 16^2 i$$

    Riittää, että annat b:ssä vastaukset muodossa eksponenttiesitys + vakio.

11. Oletetaan, että luvulle $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ pätee $w^4 = 1$.

    (a) Osoita, että $(1 + w + w^2 + w^3)(w-1) = w^4 - 1$.
    (b) Päättele summan $1 + w + w^2 + w^3$ arvo oletusten ja a-kohdan avulla.
    (c) Päättele seuraavien lausekkeiden arvo:

$$(i) \quad (w+1)(w^2+1) + w^4 \qquad (ii) \quad (w+1)^4 - 2w^2 \qquad (iii) \quad \frac{w^3}{1+w+w^2} + 1$$

12. Ratkaise kompleksinen toisen asteen yhtälö

$$x^2 + (8+4i)x + 8 + 20i = 0$$

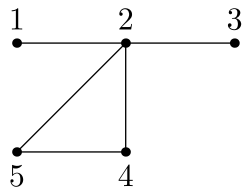
    Vihje[2]

---

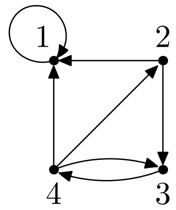
[1] $z = a + bi$ ja ympyrän yhtälö.
[2] Muokka yhtälö binomiyhtälöksi $z^2 = a$, missä $a \in \mathbb{C}$ ja $z = x + b$ jollakin $b \in \mathbb{C}$.

Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

13. Tässä tehtävässä tarkastellaan suuntaamatonta verkkoa G_1 ja suunnattua verkkoa G_2, jotka on kuvattu alla. Merkitään verkon G_k solmujen joukkoa V_k ja kaarien joukkoa E_k, missä $k \in \{1, 2\}$.



G_1



G_2

Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia? Mitkä epätosia? Perustele.

(a) $(1, 2) \in E_1$ ja $(2, 1) \in E_2$.

(b) $4 \in V_1$ tai $(4, 1) \notin E_2$.

(c) Verkon G_1 solmut 1 ja 5 ovat vierekkäisiä.

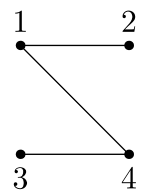
(d) Verkossa G_2 on silmukka.

(e) $(2, 4) \in E_1 \cap E_2$.

(f) Verkossa G_1 pätee $\deg(1) + \deg(3) + \deg(4) = \deg(2)$.

(g) Verkossa G_1 pätee $\sum_{v \in V_1} \deg(v) = 11$.

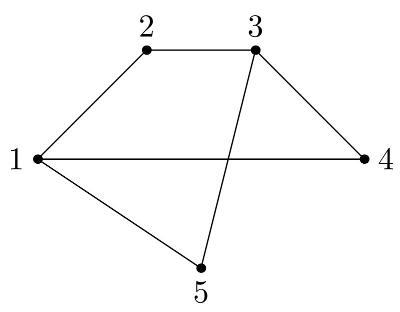
14. (a) Esitä alla oleva suuntaamaton verkko G vierusmatriisin avulla.

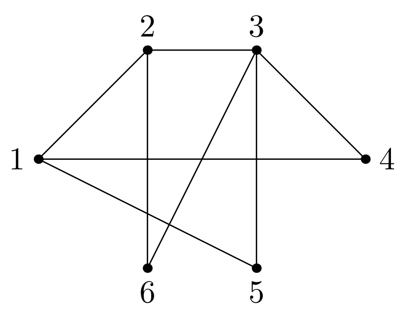


(b) Piirrä suunnattu verkko H, jonka vierusmatriisi on

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Tutki, ovatko alla olevat verkot kaksijakoisia.

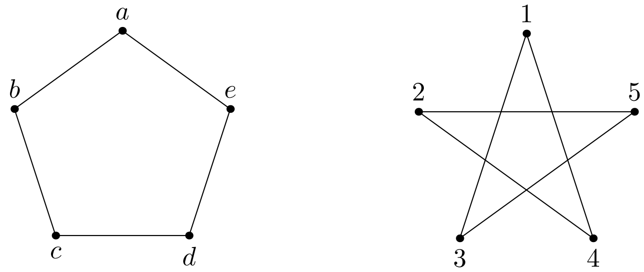




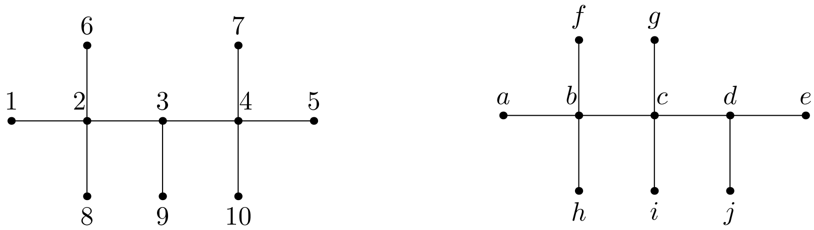
15. (a) Ovatko suuntaamattomat verkot G ja H isomorfisia, jos niiden vierusmatriisit A_G ja A_H ovat seuraavat?

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Ovatko alla olevat suuntaamattomat verkot isomorfisia? Anna sopiva isomorfismi tai perustele, ettei sellaista ole olemassa.

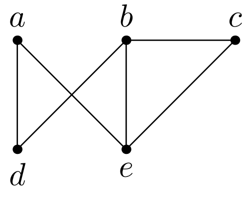


16. Ovatko alla olevat suuntaamattomat verkot isomorfisia? Anna sopiva isomorfismi tai perustele, ettei sellaista ole olemassa.



17. (a) Mitkä seuraavista solmujonoista ovat polkuja alla kuvatussa suuntaamattomassa verkossa? Määritä jokaisen polun pituus. Mitkä solmujonoista ovat yksinkertaisia polkuja? Entä mitkä ovat syklejä?

i. a, e, b, c, b ii. a, e, a, d, b, c, a iii. e, b, a, d, b, e iv. c, b, d, a, e, c.



(b) Ovatko alla kuvatut suuntaamattomat verkot yhtenäisiä?