

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan, kevät 2015
Harjoitus 11

Ratkaisut palautettava viimeistään ti 21.4.2015 klo 19.30
Korjaukset palautettava viimeistään ti 28.4.2015 klo 19.30

★ 2. kurssikoe on 4.5. klo 10-12.

Ota yhteyttä luennoitsijaan jos

- et pysty osallistumaan kurssikokeeseen sairastumisen tai päällekkäisen tentin vuoksi, viimeistään kurssikoetta seuraavana päivänä 5.5.
- olet oikeutettu lisäaikaan esim. todennetun lukihäiriön vuoksi tai jos tarvitset muita poikkeusjärjestelyitä.
- et ole kirjoittanut 1.kurssikoetta tai et saanut kurssin läpäisemiseen tarvittavat 8 pistettä 1.kurssikokeesta mutta haluat yrittää kurssin läpäisemistä.

Tehtäväsarja I

Seuraava tehtävä liittyy käänteiskuvauksen käsitteeseen. Luentokalvoista 151–160 voi olla apua

★ 1. Määritä kuvauksen f käänteiskuvaus tai perustelee, että sitä ei ole olemassa jos

- (a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on kuvaus, jolle $f(n) = |n - 2|$.
- (b) $f : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ on kuvaus, jolle $x \mapsto \sqrt{3x - 3}$.

Tehtäväsarja II

Seuraavissa tehtävissä tutkitaan erilaisia relaatioita. Luentokalvoista 165–174 voi olla apua.

2. Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $B = \{3, 5, 7\}$. Määritellään joukkojen A ja B välinen relaation R asettamalla

$$R = \{ (a, b) \in A \times B \mid a + b \geq 9 \}.$$

Esitä relaatio R luettamalla kaikki siihen kuuluvat järjestetyt parit.

3. Merkitään $K = \{ a, e, i, t, v \}$ ja $S = \{ \text{tie, vie, iva} \}$. Määritellään joukkojen K ja S välinen relaatio R asettamalla

$$R = \{ (k, s) \in K \times S \mid \text{kirjain } k \text{ esiintyy sanassa } s \}.$$

Esitä relaatio R nuolikaaviona.

4. Merkitään $A = \{ \text{avain, nyckel, key, Schlüssel} \}$. Määritellään relaatio T asettamalla

$$T = \{ (x, y) \in A \times A \mid \text{sama kirjain esiintyy sekä sanassa } x \text{ että sanassa } y \}.$$

Esitä relaatio T luettamalla kaikki siihen kuuluvat järjestetyt parit.. Onko T refleksiivinen? Entä symmetrinen? Entä transitiiivinen?

Tehtäväsarja III

Tehtävissä 5–8 oletetaan, että A on joukko, ja R ja S ovat joukon A relaatioita. Muista, että voit kumota väitteen vastaesimerkillä.

5. Oletetaan, että R ja S ovat refleksiivisiä. Onko relaatio $R \setminus S$ tällöin refleksiivinen?
6. Oletetaan, että R ja S ovat symmetrisiä. Onko relaatio $R \cap S$ tällöin symmetrinen?
7. Oletetaan, että R ja S ovat transitiivisia. Onko relaatio $R \cup S$ tällöin transitiivinen?
- ★ 8. Oletetaan, että R on symmetrinen ja transitiivinen. Onko R tällöin refleksiivinen?

Tehtäväsarja IV

Seuraavat tehtävät liittyvät ekvivalenssirelatioihin ja ekvivalenssiluokkiin. Luentokalvoista 180–189 voi olla apua.

9. Olkoon S kaikkien suomen kielen sanojen muodostama joukko. Määritellään joukon S relaatio P seuraavasti:

$$P = \{(a, b) \in S \times S \mid \text{sanassa } a \text{ on yhtä monta kirjainta kuin sanassa } b \}.$$

Onko P ekvivalenssirelaatio? Mitkä siinä tapauksessa ovat sen ekvivalenssiluokat?

10. Määritellään joukon $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ relaatio \sim seuraavasti: $a \sim b$, jos $ab > 0$. Onko relaatio \sim ekvivalenssirelaatio? Mitkä siinä tapauksessa ovat sen ekvivalenssiluokat?
11. Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja oletetaan, että R on joukon A ekvivalenssirelaatio. Oletetaan, että $\{(1, 3), (2, 3), (3, 5)\} \subset R$ ja $(1, 4) \notin R$.
 - (a) Päteekö $(5, 2) \in R$?
 - (b) Päättele oletusten avulla, mitkä järjestetyt parit kuuluvat relaatioon R .
 - (c) Mitkä ovat relaation R ekvivalenssiluokat?
- ★ 12. Määritellään joukon \mathbb{Z} relaatio \sim seuraavasti: $m \sim n$, jos $m - n = 4k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Onko relaatio \sim ekvivalenssirelaatio? Mitkä siinä tapauksessa ovat sen ekvivalenssiluokat?

Kompleksiluvut

13. Olkoon $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$ kuvaus, jolla $f(z) = \frac{z - 2i}{z}$ kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
 - (a) Laske $f(1 - i)$.
 - (b) Määritä kuvauksen f käänteiskuvaus tai osoita, että sitä ei ole olemassa.

Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

14. ISSN on jatkuvasti ilmestyvän tekstijulkaisun kansainvälinen tunnus. Se on muotoa $d_1d_2d_3d_4 - d_5d_6d_7d_8$, missä seitsemän ensimmäistä merkkiä ovat numeroita $0, 1, \dots, 9$. Viimeinen merkki d_8 on tarkistusmerkki. Se määräytyy kongruenssista

$$d_8 \equiv \sum_{k=1}^7 (k+2)d_k \pmod{11}.$$

Jos $d_8 \equiv 10 \pmod{11}$, merkitään tarkistusmerkiksi X .

- (a) Tarkista, ovatko seuraavat mahdollisia ISSN-tunnuksia. Onko niissä oikea tarkistusmerkki?

(i) 3103 – 2015 (ii) 0101 – 0107.

- (b) Jos ISSN-tunnuksen seitsemän ensimmäisestä merkistä yksi on vahingossa merkattu väärin, tulee virhe varmasti ilmi tarkistusmerkin avulla? Vai onko mahdollista, että yksi merkki on väärin mutta tarkistusmerkki on silti oikea? Toisin sanoen, onko olemassa kaksi ISSN-tunnusta joissa vain yhdessä kohtaa tunnuksen merkkijonoja merkit ovat eri?