

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan, kevät 2015
Harjoitus 10

Ratkaisut palautettava viimeistään ti 14.4.2015 klo 19.30
Korjaukset palautettava viimeistään ti 28.4.2015 klo 19.30

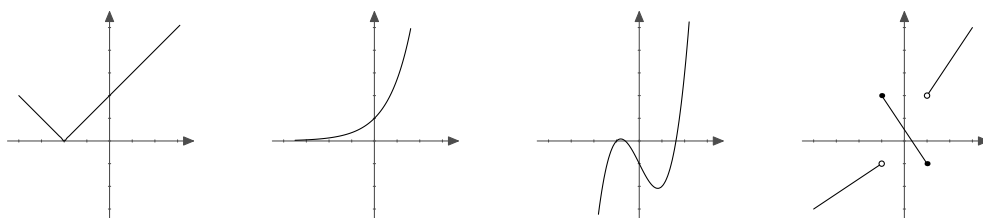
Tehtäväsarja I

1. Määritellään kuvaukset $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{jos } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{muulloin,} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jos } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määritä yhdistetyt kuvaukset $g \circ f$ ja $f \circ g$. Piirrä niiden kuvaajat (kumpikin omaan koordinaatistoonsa).

2. Alla on näkyvissä joidenkin funktioiden $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaajia. Mitkä näistä funktioista ovat injektioita? Mitkä niistä ovat surjektioita?



3. Osoita, että kuvaus g on kuvauksen f käänteiskuvaus, jos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on määritelty asettamalla

$$f(x) = \frac{x-3}{4} \quad \text{ja} \quad g(x) = 4x+3 \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

- ★ 4. Määritä kuvauksen f käänteiskuvaus tai perustele, että sitä ei ole olemassa, jos

- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on kuvaus, jolle $x \mapsto 2x - 9$.
(b) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ on kuvaus, jolle $z \mapsto 2z - 5$.

5. Määritä kuvauksen g käänteiskuvaus tai perustele, että sitä ei ole olemassa, jos

- (a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on kuvaus, jolle $x \mapsto 8x^3 - 2x$.
(b) $g: [2, \infty[\rightarrow [3, \infty[$ on kuvaus, jolle $x \mapsto \sqrt{x-2} + 3$.

Tehtäväsarja II

Tehtävissä 6–8 oletetaan, että $f: X \rightarrow Y$ on kuvaus, $A \subset X$ ja $B \subset Y$.

6. (a) Osoita, että $A \subset f^{-1}[fA]$.
(b) Osoita vastaesimerkillä, että sisältyminen toiseen suuntaan ei päde yleisesti.
7. Oletetaan, että $f: X \rightarrow Y$ on kuvaus. Osoita, että kuvaus f on injektio, jos ja vain jos $f^{-1}[fA] = A$ kaikilla $A \subset X$. *Vihje: pieni osa on tehty tehtävässä 6.*
8. Oletetaan, että $f: X \rightarrow Y$ on kuvaus. Osoita, että kuvaus f on surjektio, jos ja vain jos $f[f^{-1}B] = B$ kaikilla $B \subset Y$.
9. Perustele, miksi seuraavat säännöt eivät ole kuvauksia.

- (a) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(m/n) = (m+n)/(n^2+1)$ kaikilla $m/n \in \mathbb{Q}$.
(b) $g: [-1, 1] \rightarrow]0, \infty[$, $g(t) = 5t^2 + 5t + 1$ kaikilla $t \in [-1, 1]$.

Kompleksiluvut

10. Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

*Vihje*¹

- ★ 11. Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö

$$(a) \quad z^4 = 81i \qquad (b) \quad (1 - i)z^5 = z^2$$

ja merkitse löytämäsi ratkaisut kompleksitasoon.

12. Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö

$$(x^2 - 3x + 10)(x^4 - 81) = 0.$$

Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

13. Todista lauseen 40 ensimmäinen implikaatio.

14. (a) Todista lauseen 41 (b)-osa (vihje: lause 40).

- (b) Todista lauseen 41 (c)-osa (vihje: lauseet 28 ja 40).

- ★ 15. (a) Laske $31032015 \bmod 10$

- (b) Laske $31032015 \bmod 3$

- (c) Laske $6^{2015} \bmod 11$

¹Tutki lauseketta $(a + b)^2$ kun $a = x^2$ ja $b = x + 1$