1 Esimerkki toistokokeesta

Heitetään "painotettua kolikkoa", joka tuottaa kruunan tn:llä $p = 0{,}1$ ja klaavan tn:llä $q = 1 - p = 0{,}9$. (Käytännön toteutus voisi olla 10-sivuinen noppa, jossa yksi sivu on merkitty kruunaksi ja 9 sivua klaavaksi). Kutsumme (mielivaltaisesti) vaikkapa kruunaa "onnistumiseksi". Kolikkoa heitetään $n = 4$ kertaa. Mikä on tapahtuman $B_k =$ "saadaan tasan k onnistunutta heittoa" todennäköisyys, kun $k = 0, 1, 2, 3, 4$?

Ratkaisu. Otetaan perusjoukoksi $\{0, 1\}^4$, ts. nollista ja ykkösistä koostuvat neljän pituiset jonot. Jonon i:s alkio kuvaa i:nnen heiton onnistumista (1) tai epäonnistumista (0). Alkeistapauksia on $2^4 = 16$ kpl.

Alkeistapaukset *eivät ole symmetriset*, ei siis voida käyttää klassista menetelmää "suotuisien alkeistapausten lukumäärä jaettuna kaikkien alkeistapausten lukumäärällä"; tämä tarkoittaisi kaikkien alkeistapausten tn:n olettamista $\frac{1}{16}$:ksi.

Esim. alkeistapaus $(0, 0, 1, 1)$ tarkoittaa tapahtumaa, jossa (riippumattomissa heitoissa) on tullut tulokset klaava, klaava, kruuna, kruuna (tässä järjestyksessä). Tämän heittotuloksen todennäköisyys on riippumattomuuden nojalla tulo

$$P((0, 0, 1, 1)) = q \times q \times p \times p = p^2 q^2 = 0{,}0081.$$

Luetellaan kaikki 16 alkeistapausta ryhmiteltynä ykkösten määrän mukaan.

alkeistapaus	ykkösiä kpl	todennäköisyys	
(0,0,0,0)	0	$qqqq = 0{,}6561$	$\binom{4}{0} = 1$ alkeistapaus
(0,0,0,1)	1	$qqqp = 0{,}0729$	
(0,0,1,0)	1	$qqpq = 0{,}0729$	$\binom{4}{1} = 4$ alkeistapausta
(0,1,0,0)	1	$qpqq = 0{,}0729$	
(1,0,0,0)	1	$pqqq = 0{,}0729$	
(0,0,1,1)	2	$qqpp = 0{,}0081$	
(0,1,0,1)	2	$qpqp = 0{,}0081$	
(1,0,0,1)	2	$pqqp = 0{,}0081$	$\binom{4}{2} = 6$ alkeistapausta
(0,1,1,0)	2	$qppq = 0{,}0081$	
(1,0,1,0)	2	$pqpq = 0{,}0081$	
(1,1,0,0)	2	$ppqq = 0{,}0081$	
(0,1,1,1)	3	$qppp = 0{,}0009$	
(1,0,1,1)	3	$pqpp = 0{,}0009$	$\binom{4}{3} = 4$ alkeistapausta
(1,1,0,1)	3	$ppqp = 0{,}0009$	
(1,1,1,0)	3	$pppq = 0{,}0009$	
(1,1,1,1)	4	$pppp = 0{,}0001$	$\binom{4}{4} = 1$ alkeistapaus
		$\Sigma = 1{,}0000$	

Alkeistapausten määrä kussakin ryhmässä johtuu siitä, miten monella tavalla k ykköstä voivat sijoittua n:ään heittokertaan – kyseessä on tuttu binomikerroin. Samaan ryhmään kuuluvat alkeistapaukset ovat yhtä todennäköisiä, koska niiden tn:ssä on yhtä monta p:tä (ja yhtä monta q:ta), vaikkakin eri järjestyksessä.

Tapahtuma B_k koostuu $\binom{n}{k}$:sta alkeistapauksesta (ryhmä, jossa ykkösiä on k kpl), joiden kunkin todennäköisyys on $p^k q^{n-k}$. Siten

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Tämä on yleinen kaava toistokokeessa tapahtumalle "tasan k onnistumista".

Huom. 1. Toistokokeen yhteydessä on tarkoin erotettava yhden alkeistapauksen eli tulosjonon todennäköisyys tapahtuman "k ykköstä" todennäköisyydestä, ts. pitää huomata tuleeko mukaan binomikerroin $\binom{n}{k}$ vai ei.

Huom. 2. Toistokoe voi toki olla symmetrinenkin, eli $p = q = \frac{1}{2}$. Tällöin kaikki alkeistapaukset ovat yhtä todennäköisiä $(1/2^n)$ ja voitaisiin yhtä hyvin käyttää klassista, symmetristen alkeistapausten mallia.

Huom. 3. "Painotettu kolikko" (engl. *biased coin*) on todennäköisyyslaskennassa eräänlainen tyyppiesimerkki epäsymmetrisestä toistokokeesta, ts. satunnaiskokeesta, joka on riippumattomasti toistettavissa ja jossa joka kerta on sama onnistumistodennäköisyys $p \neq \frac{1}{2}$. *Käytännössä* ei ole selvää, että fysikaalista kolikkoa painottamalla (ts. asettamalla kolikon painopiste hiukan sivuun geometrisesta keskipisteestä) saataisiin aikaan kolikko, joka tuottaisi kruunan hallitusti aina tn:llä $p \neq \frac{1}{2}$. Kruunan todennäköisyyteen vaikuttaa paitsi mahdollinen painotus, myös kolikon heittotapa. Itse asiassa painottamatonta, "reilua" kolikkoakin voidaan heittää epäreilulla *tavalla*, joka tuottaa epäsymmetriset todennäköisyydet.

Fyysikko ja tilastotieteilijä Edwin T. Jaynes kuvailee kirjassaan kolikonheiton fysiikkaa. Hän suoritti kokeita, joissa "painotettuna kolikkona" toimi kurkkupurkin metallikansi. Vaikka kannen massajakauma on hyvin epäsymmetrinen, Jaynes pystyi heittotapaa vaihtamalla saamaan lähes pelkkiä "kruunia" (painava sivu alas), pelkkiä "klaavoja" (painava sivu ylös), tai tasaisesti molempia.

"Painotettu kolikko" on siis ajateltava lähinnä vertauskuvaksi.

Kirjallisuutta:

E. T. Jaynes (2003): *Probability Theory: The Logic of Science*, s. 317–321. Cambridge University Press.
Käsikirjoitusversio myös internetissä: `http://www-biba.inrialpes.fr/Jaynes/cc10k.pdf`, s. 1003–1007.