Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Kevät 2015

Luento 8 / 13

Jukka Kohonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Helsingin yliopisto

JUSSIN JUNAMATKAT

Jussin junamatkat

- Jussi on töissä Martinlaaksossa. Joka iltapäivä hän lähtee töistä ja on asemalla satunnaiseen aikaan klo 16 ja 17 välillä.
- Asemalta kulkee yhtä usein (10 minuutin välein) junia
  - pohjoiseen Vantaankoskelle, jossa Jussin äiti asuu
  - etelään Helsinkiin, jossa Jussin naisystävä asuu.
- Jussi hyppää aina ensimmäiseen paikalle osuvaan junaan ja syö päivällisen Vantaankoskella tai Helsingissä sen mukaan, mihin juna hänet vie.

Äiti valittaa, että Jussi on tavannut hänet vain 2 kertaa viimeisten 20 työpäivän jälkeen!

Jussin mielestä se on vain sattumaa, mahdollisuudet ovat tasan.

Mistä on kysymys?

Frederick Mosteller (1965): Fifty challenging problems in probability

Jussin junamatkat

M-junan ohitusajat Martinlaaksossa:

Helsinkiin	16.03, .13, .23, .33, .43, .53, ...
Vantaankoskelle	16.04, .14, .24, .34, .44, .54, ...

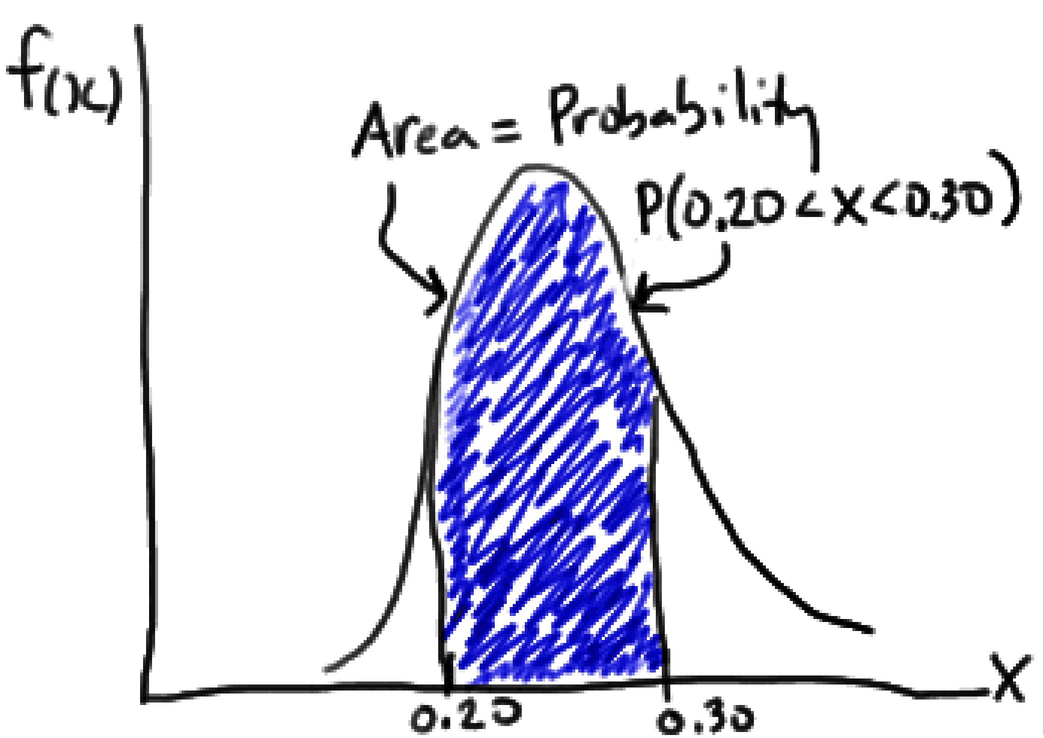
Jos saapumisaika osuu väleille 03–04, 13–14 jne. (1 minuutin pituiset välit), Jussi matkustaa Vantaankoskelle äidin luokse.

Jos saapumisaika osuu väleille 04–13, 14–23 jne. (9 minuutin pituiset välit), Jussi matkustaa Helsinkiin naisystävän luokse.

Jussin junamatkat

- **Jos** mahdollisuudet olisivat tasan (symmetrinen toistokoe, kuten kolikonheitto), niin tn tavata äiti vain 2 kertaa 20:stä olisi

$$\binom{20}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^{18} \approx 1/5500$$



JATKUVA SATUNNAISMUUTTUJA

Tiheysfunktio

- Jos X:n tiheysfunktio on f,
niin f(x) **ilmaisee verrannollisuuskertoimen**:
tn osua (lyhyelle) välille (x:n lähellä) on välin pituus kertaa f(x).

- Huom: f(x) **ei ole todennäköisyys**, että X=x
- Esim. ennuste lämpötilasta, joka tasajakautunut välillä (20, 30)
- Koska f(x) ei ole todennäköisyys, se voi olla suurempikin kuin 1. (Mitä tämä tarkoittaa?)

Kertymäfunktio

- Vaikka tiheysfunktio antaa **intuitiivisemman** käsityksen jakaumasta (mihin jakauma keskittyy), kertymäfunktio on keskeinen **laskennallinen** työkalu jakaumien käsittelyssä.
- F(x) vastaa kysymykseen ”mikä on tn, että $X \leq x$”.
- Esim. lämpötilalle F(25) = ½ tarkoittaa, että on ½ todennäköisyys, että lämpötila on enintään 25 astetta.

- Kertymäfunktion on pakko olla kasvava – miksi?
- Kertymäfunktio kasvaa arvojoukossa vasemmalta 0:sta oikealle 1:een – miksi?
- Kertymäfunktio on yleensä tf:n integraali, ja tf on kertymäfunktion derivaatta – miksi?

Epätasaisia jakaumia

- Eksponenttijakauma (Tuominen s. 59)
  muistuttaa geometrista jakaumaa, mutta onkin jatkuva

- Ts. ”yrityksiä” on jatkuvasti, ei vain kokonaislukujen kohdalla. Esim.
  - Alkeishiukkanen voi hajota milloin tahansa, mikä on hiukkasen elinikä?
  - Laite voi hajota milloin tahansa, miten kauan se toimii?
    (”Satunnainen” hajoaminen, ei kuluminen)
  - Tuulilasiin voi osua kivi milloin tahansa, miten kauan voidaan ajaa ennen kuin ensimmäinen kivi osuu?

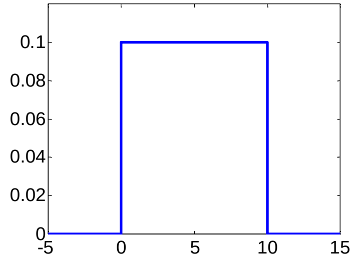
- Huom: mediaani ei ole odotusarvon kohdalla
  (lasketaan kertymäfunktion avulla!)

  (mediaani = se piste, jonka molemmin puolin on puolet todennäköisyydestä, tarkemmin Tuominen s. 89)

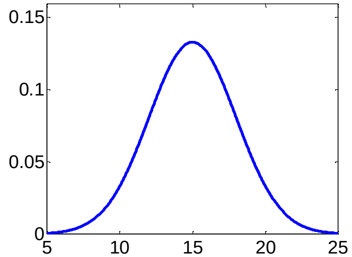
JATKUVIEN JAKAUMIEN KÄSITTELYÄ

Tiheys- ja kertymäfunktio; E(X)

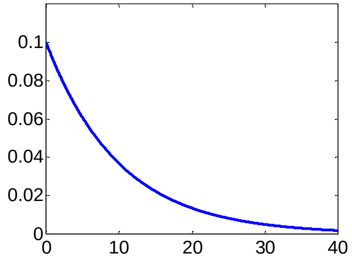
- Käydään läpi muutamia jatkuvia jakaumia



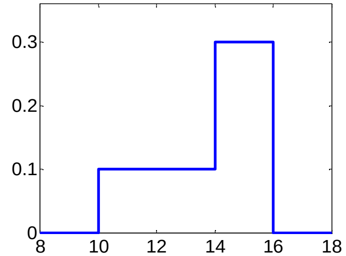
Tas(*a*, *b*)



N(μ, σ^2)



Exp(λ)

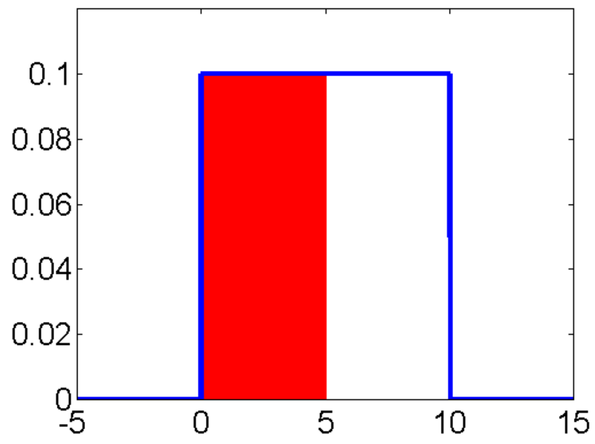


Mikä tahansa jakauma, jonka tiheys tunnetaan

- Miten lasketaan tietyn **välin todennäköisyys**
  - Tiheydestä: integroimalla Määritelmä 2.3.1 (s. 56)
  - Kertymästä: vähennyslaskulla Huomautus 2.3.5 (s. 57)

- Miten lasketaan tai todetaan jakauman **odotusarvo**
  - Tiheydestä: integroimalla Määritelmä 2.4.1 (s. 64)

Tasajakauma



- Bussin odotusaika **X ~ Tas(0, 10)**

- Tiheys $f(x) = 1/10$ kun $0<x<10$
- Kertymä $F(x)= x/10$ kun $0<x<10$ Huom. $F'(x)=f(x)$

- Välien todennäköisyydet integroimalla tiheyttä (vakiota) ko. välin yli, **tai suoraan kertymäfunktiosta:**

  $P(2 < X < 5) = F(5) - F(2) = 0.5 - 0.2 = 0.3$

  $P(X > 7) = 1 - F(7) = 1.0 - 0.7 = 0.3$

  $P(X < 5) = F(5) = 0.5$

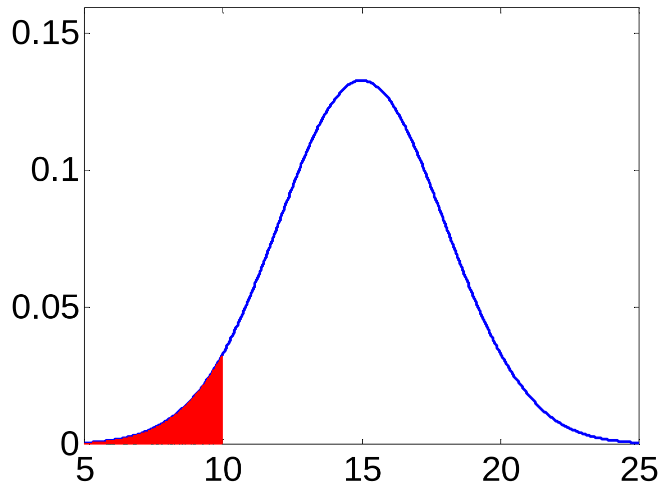
- Tasajakauman odotusarvolle on tunnettu lauseke (= päätepisteiden keskiarvo)

  $E(X) = (0+10) / 2 = 5.0$

  Mutta se voidaan myös laskea raa'asti integraalina:

  $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{10} x \cdot 0.1 dx = 5.0$$

Normaalijakauma



- Bussin matka-aika **$X \sim$ N(15, 3^2)**
  Parametrit μ=15, σ=3

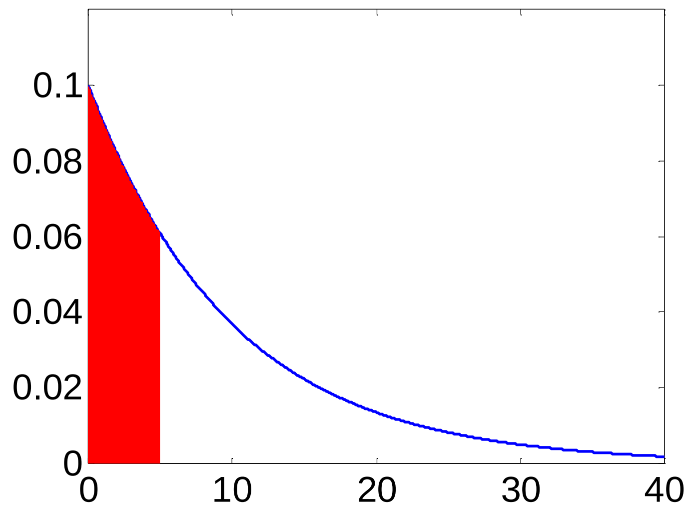
- Tiheys $f(x) = c \cdot \exp(- \ldots)$
- Kertymä $F(x) = \Phi((x - 15) / 3)$

- Tiheysfunktiota hankala integroida joten käytetään kertymäfunktiota.
  (Kertymäfunktio löytyy taulukoista, esim. Tuomisen kirjan takana, ja monista laskimista)
- Välien todennäköisyydet suoraan kertymäfunktiosta:

$P(10 < X < 15)$	$= F(15) - F(10)$	$= 0.500 - 0.048$	$= 0.452$
$P(X > 20)$	$= 1 \quad - F(20)$	$= 1.000 - 0.952$	$= 0.048$
$P(X < 10)$	$= F(10)$		$= 0.048$

- Normaalijakauman odotusarvolle on tunnettu lauseke (= eka parametri μ)
  $E(X) = 15$

Exp-jakauma



- Lampun kestoaika **X ~ Exp(0.1)**
  Parametri λ=0.1

- Tiheys $f(x) = 0.1 \exp(-0.1x)$ kun $x>0$
- Kertymä $F(x)= 1 - \exp(-0.1x)$ kun $x>0$ Huom. F'(x)=f(x)

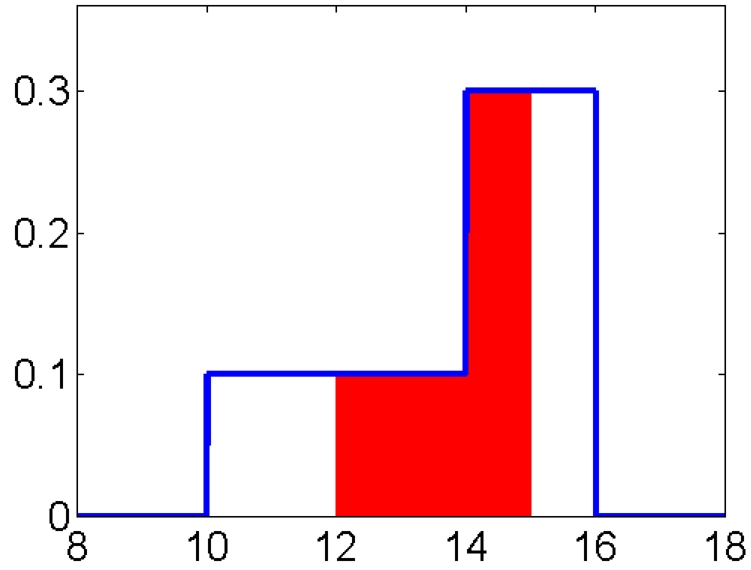
- Välien todennäköisyydet integroimalla tiheyttä ko. välin yli, **tai suoraan kertymäfunktiosta:**
  $P(5 < X < 10) = F(10) - F(5) = 0.632 - 0.394 = 0.239$
  $P(X > 20) = 1 - F(20) = 1.000 - 0.865 = 0.135$
  $P(X < 5) = F(5) = 0.394$

- Eksponenttijakauman odotusarvolle on tunnettu lauseke (= 1 / λ)
  $E(X) = 1 / 0.1 = 10$
  Sen voisi laskea myös integraalina (tarvitaan osittaisintegrointia)

Yleinen tiheysfunktio

- Meteorologi kertoo, että huomisaamun lämpötilalla *X* on tiheysfunktio

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{kun } 10 \le x < 14 \\ 0.3 & \text{kun } 14 \le x < 16 \\ 0 & \text{muualla} \end{cases}$$



- Todennäköisyydet ja odotusarvo saadaan integroimalla

$$P(12 < X < 15) = \int_{12}^{15} f(x)dx = \int_{12}^{14} 0.1\,dx + \int_{14}^{15} 0.3\,dx = 0.2 + 0.3 = 0.5$$

$$E(X) = \int_{10}^{16} x \cdot f(x)dx = \int_{10}^{14} x\,0.1\,dx + \int_{14}^{16} x\,0.3\,dx = 4.8 + 9.0 = 13.8$$