Johdatus tilastolliseen päättelyyn, kevät 2015
Harjoitus 4 (14.–17. 4.)

Opastus: Nämä tehtävät viimeistä lukuunottamatta liittyvät monisteen lukuun 6. Testien voiman käsitettä (jakso 6.3 ja osittain 6.5), testien ja luottamusjoukkojen duaalisuutta (jakso 6.6) ja binomijakauman testausta (jakso 6.8) emme kuitenkaan kurssilla käsittele, vaikkakin erityisesti jakso 6.6 on hyödyllistä luettavaksi itse. Tärkeimmät tehtävät ovat 1–4. Tarvittava t-jakauman taulukko on ohessa; vaihtoehtoisesti voit käyttää netistä löytyviä online-laskimia, esimerkiksi osoitteessa http://surfstat.anu.edu.au/surfstat-home/tables/t.php.

1. Eräässä väestössä on otantatutkimuksen avulla tutkittu tuloeroja yhtäältä miesten ja naisten välillä ja toisaalta mustien ja valkoisten välillä. Tutkimuksen tulokset raportoidaan tällaiseen hyvin tyypilliseen tapaan: ”Miesten ja naisten keskituloissa havaittiin merkitsevä ero ($p = 0.009$), miesten ansaitessa keskimäärin enemmän. Mustien ja valkoisten keskituloissa sen sijaan ei havaittu eroa ($p = 0.11$).”

a) Ystäväsi ei ole opiskellut lainkaan tilastotiedettä. Miten selität tutkimuksen tulokset ja siinä esiintyvät lukuarvot hänelle?

b) Ystäväsi kysyy: ”Onko nyt siis osoitettu, että ko. väestössä miehet ansaitsevat keskimäärin enemmän kuin naiset ja että mustilla ja valkoisilla on olennaisesti samat keskitulot?” Miten vastaat? Perustele.

2. Professorilla on tavoitteena mitoittaa kurssinsa vaatima viikottainen työmäärä siten, että opiskelijat keskimäärin joutuisivat käyttämään kurssiin liittyvään opiskeluun enintään 10 tuntia. Eräällä viikolla tehdyssä otoksessa (kokoa 13) opiskelijat käyttivät aikaa opiskeluun keskimäärin 11.1 tuntia ja aikojen keskihajonta oli 1.8 tuntia. Testaa t-testillä ja 5 %:n merkitsevyystasolla, onko professorin syytä katsoa epäonnistuneen tavoitteessaan. Oletamme (paremman puutteessa), että vaihtelu opiskeluajoissa opiskelijoiden kesken on likimain normaalisti jakautunutta.

3. Tutkimusryhmät A ja B ovat toisistaan riippumattomasti tutkineet ilmiötä, jota voidaan kuvata satunnaisotoksella normaalijakaumasta $N(\mu, \sigma^2)$, jossa molemmat parametrit ovat tuntemattomia. Kiinnostuksen kohteena on populaation keskiarvo μ. Tutkimusryhmien tulokset (otoskoko, otoskeskiarvo ja otosvarianssi) ovat vastaavasti

$$n_A = 10, \quad \bar{y}_A = 3.952, \quad s_A^2 = 1.981$$
$$n_B = 15, \quad \bar{y}_B = 3.411, \quad s_B^2 = 1.321$$

Tehtäväsi on harjoittaa meta-analyysiä eli yhdistää näiden kahden tutkimuksen tulokset. Laske parametrien μ ja σ^2 tavanomaiset piste-estimaatit käyttämällä hyväksi sekä ryhmän A että ryhmän B havainnot yhdessä.

4. Jatkoa edelliseen tehtävään. Asetetaan hypoteesit $H_0\colon \mu = 3$ ja $H_1\colon \mu \neq 3$. Testaa näitä kaksisuuntaisella t-testillä ja merkitsevyystasolla 0.05 käyttäen a) kummankin tutkimusryhmän aineistoja erikseen, b) yhdistettyä aineistoa.

5. Palauta mieleen harjoituksen 1 tehtävän 4 d-kohdan kysymyksenasettelu ja siinä tehty lasku. Miten muotoilisit tämän täsmällisenä testausasetelmana? Mitkä olisivat nollahypoteesi ja vastahypoteesi? Jos testisuureena käytetään suurinta havaintoa eli odotusaikaa $y_{(50)} = \max(y_1, \ldots, y_{50})$, millaiset testisuureen arvot (suuret vai pienet) ovat kriittisiä nollahypoteesin kannalta? Mikä on p-arvo eli havaittu merkitsevyystaso? Entä johtopäätökset?

6. Uskottavuusvälit: vaihtoehtoinen menetelmä väliestimointiin. Olkoon $L(\theta; \mathbf{y})$ johonkin tilastolliseen malliin ja aineistoon $\mathbf{y}$ liittyvä uskottavuusfunktio sekä $\hat{\theta}$ parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaatti. Jos $0 < c < 1$, sanotaan, että joukko

$$\{\theta : L(\theta; \mathbf{y}) \geq c \cdot L(\hat{\theta}; \mathbf{y})\} = \left\{\theta : \frac{L(\theta; \mathbf{y})}{L(\hat{\theta}; \mathbf{y})} \geq c\right\}$$

on $100c$ %:n *uskottavuusjoukko* parametrille θ. Jos θ on yksiulotteinen, kyseinen joukko on tavallisesti väli ja sitä kutsutaan *uskottavuusväliksi.* Esimerkiksi $c = 0.1$ vastaa 10 %:n uskottavuusjoukkoa.

Tarkastellaan binomikoetta (eli toistokoetta), jossa onnistumistodennäköisyys on tuntematon parametri $0 \leq \theta \leq 1$, toistojen lukumäärä on $n = 10$ ja on havaittu 4 onnistumista. Palauta mieleen tätä vastaava uskottavuusfunktio ja suurimman uskottavuuden estimaatti $\hat{\theta}$. Etsi sitten 50 %:n ja 10 %:n uskottavuusvälit θ:lle. Riittää antaa välien päätepisteet yhden desimaalin tarkkuudella. Halutessasi tarkastele asiaa graafisesti tai käytä apuna esim. R:ää.

Opetus. Uskottavuusvälit ja -joukot ovat hyvin luonteva "uskottavuuspohjainen" tapa suorittaa väliestimointia ja samalla täydentää suurimman uskottavuuden menetelmän antamaa piste-estimaattia. Tulkinnallisestikin ne ovat kenties helpommin ymmärrettäviä kuin luottamusvälit. Niitä kuitenkin käytetään (frekventistisessä) tilastotieteessä hyvin vähän luottamusväleihin verrattuna.

Taulukko 1: t_ν-jakauman u-yläkvantiileja $t_\nu(u)$, joille $u = P(X > t_\nu(u))$, kun $X \sim t_\nu$. Tässä ν on jakauman vapausasteluku ja t_∞ tarkoittaa standardinormaalijakaumaa $N(0,1)$, jolloin on tapana merkitä $t_\infty(u) = z_u$.

$\nu \backslash u$	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
31	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375
32	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365
33	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356
34	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348
35	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
36	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333
37	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326
38	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319
39	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313
40	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
∞	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090