Tehtäviä 9, 9.2.2015 henrik.kettunen@helsinki.fi

1. Perehdytään käyrien sovittamiseen annettuun dataan. Luodaan tätä esimerkkiä varten satunnainen data. Aja ensin yhden kerran komento `rng('shuffle')`, jotta saat hieman erilaiset käyrät kuin vierustoverisi.

```
xdata = 0:2:10;
data = 10*rand(size(xdata));
figure(1); plot(xdata,data,'.','markersize',20); grid
```

   Sovitetaan tähän dataan n. asteen polynomi. Koska datapisteitä on vain kuusi, voidaan sovituksessa yksikäsitteisesti käyttää vain 5. asteen polynomia. Muodostetaan sovitukset asteluvuilla $n = 3$, $n = 4$ ja $n = 5$ ('help polyfit'). Muodostetaan näitä varten uusi tiheämpi pisteistö, jossa sovitetut polynomit lasketaan ('help polyval').

```
p3 = polyfit(xdata,data,3); % kertoimet 3. asteen polynomille
p4 = polyfit(xdata,data,4); % kertoimet 3. asteen polynomille
p5 = polyfit(xdata,data,5); % kertoimet 3. asteen polynomille

x = linspace(0,10,200); % Uusi, tiheämpi laskentapisteistö
y3 = polyval(p3,x); % 3. asteen polynomin arvojen laskenta pisteissä x
y4 = polyval(p4,x); % 3. asteen polynomin arvojen laskenta pisteissä x
y5 = polyval(p5,x); % 3. asteen polynomin arvojen laskenta pisteissä x

% Piirretään kuvaaja
figure(1); plot(xdata,data,'.',x,y3,x,y4,x,y5,'markersize',20,'linewidth',2); grid
xlabel('x')
ylabel('y(x)')
title('n. asteen polynomin sovitus satunnaiseen dataan')
legend('alkup. data','n = 3','n =4 ','n = 5')
```

   Tallenna saamasi kuva Matlabin omaan figure-muotoon (esim. kuva1.fig). Kuvan voi tämän jälkeen sulkea ja avata uudelleen muokattavaksi. Tämän jälkeen tallenna kuva .emf-muotoon (Enhanced Metafile). Kuvan omasta ikkunasta File-valikon alta Export Setup. Määrää kuvan leveydeksi 15 cm ja fonttikooksi 12. Tarkasta asetusten vaikutus valitsemalla Apply to Figure. Tallenna kuva (Export) vaikka nimellä kuva1.emf. Avaa nyt Word ja luo uusi dokumentti. Liitä Matlabilla luomasi kuva tähän dokumenttiin (Insert -> Picture). Tarkista, että kuva on järkevän näköinen ja kokoinen, ja fontit ovat luettavissa.

2. Perehdytään sitten datan interpolointiin. Luo uudelleen vektorit `xdata`, `data` ja `x`, kuten teit äskeisessä tehtävässä (data siis vaan arvotaan uudelleen.) Interpoloi dataa Matlabin yksiuloitteisen intepoloinnin avulla ('help interp1'). Syntaksi on seuraavanlainen

```
y = interp1(xdata,data,x,'metodi')
```

   Laske interpolaatiokäyrät parametrin 'metodi' arvoilla 'nearest', 'linear', 'spline' ja 'pchip'. Tutki help-komennon (tai Googlen) avulla, mitä kukin metodi tekee. Laske vielä erikseen eri interpolaatioiden antamat arvot pisteissä `x2 = 1:2:9`. Ovatko ne lähelläkään toisiaan? Piirrä interpolaatiokäyristä kaksi kuvaa (subplot): 'nearest' ja 'linear' keskenään samaan kuvaan, sekä 'spline' ja 'pchip' keskenään toiseen. Plottaa kuviin myös alkuperäiset datapisteet. Tallenna ja eksportoi tämäkin kuva Word-dokumenttiin.

3. Perehdytään numeeriseen integrointiin Riemannin summan avulla. Ks. `http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_sum`. Lasketaan integraalia

$$I = \int_0^{10} x^2 dx$$

   menetelmien 'middle sum' ja 'trapezoidal rule' avulla ('help trapz'). Seuraava skripti jakaa integrointialueen 10 osaan.

```
N = 11; % Integrointipisteiden määrä
a = 0; % Integraalin alaraja
```

```
b = 10; % Integraalin yläraja

% Laskentapisteet trapetsoidimenetelmää varten
xt = linspace(a,b,N);

% Pisteiden välinen välimatka
dx = xt(2)-xt(1); % pisteet tasavälein

% Laskentapisteet Riemannin summaa varten (middle sum)
xm = linspace(a+dx/2,b-dx/2,N-1);

% Middle sum:
ym = xm.^2; % integrandi
Im = sum(ym)*dx % Integrointi Riemannin summan avulla

% Integrandi (trapetsoidi)
yt = xt.^2;
It = trapz(xt,yt) % Integrointi trapetsoidisäännöllä
```

Jos integroitava lauseke tunnetaan, paras tapa on kuitenkin käyttää Matlabin *integral*-komentoa. Laske tällä vertailutulos:

```
I = integral(@(x) x.^2,0,10)
```

4. Tutki äskeisen tehtävän tapauksessa, kuinka menetelmät suppenevat kohti oikeaa tulosta, kun integrandin jakoa tihennetään. Kirjoita skripti, joka käy yllä olevan integroinnin läpi pistemäärillä $N = 2^M$, missä $M = 2, 3, 4, 5$. Piirrä samaan kuvaajaan molempien integrointimenetelmien tulokset N:n funktiona.

5. Laske seuraavat integraalit sekä Riemannin summan, trapetsoidisäännön että integral-komennon avulla.

   (a) $\int_0^{2\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$

   (b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) - \sin^2(2t)\,\mathrm{d}t$

   (c) $\int_{-1}^{2} x^5 - 5x + 2\,\mathrm{d}x$

   (d) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z|}\,\mathrm{d}z$

6. Integraaleja kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa (*integral2*, *integral3*)

   (a) $\int_0^1 \int_0^1 xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

   (b) $\int_0^3 \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ (3-säteisen ympyrän pinta-ala)

   (c) $\int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 x^2 + y^2 + z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

   (d) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2.5} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ (2,5-säteisen pallon tilavuus)

7. Kappaleen massa saadaan sen tiheyden tilavuusintegraalina $m = \int_V \varrho \mathrm{d}V$. Mikäli kappale on homogeeninen, eli sen tiheys on vakio, yksinkertaistuu massa laskenta tiheyden ja tilavuuden tuloksi. Oletetaan, että meillä on epähomogeeninen pallonmuotoinen kappale, jonka ulkosäde on R. Laske kappaleen massa, kun

   (a) $R = 20\,\mathrm{cm}$ ja $\varrho = \rho_0$

   (b) $R = 30\,\mathrm{cm}$ ja $\varrho = \begin{cases} \varrho_0, & 0 \leq r \leq 10\,\mathrm{cm} \\ 2\varrho_0, & 10\,\mathrm{cm} < r \leq 20\,\mathrm{cm} \\ 3\varrho_0 & 20\,\mathrm{cm} < r \leq 30\,\mathrm{cm} \end{cases}$

   (c) $R = 50\,\mathrm{cm}$ ja $\varrho(r) = 5\varrho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$

   Käytetään kaikissa tapauksissa vertailutiheytenä kullan tiheyttä $\varrho_0 = 19,32 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$