alltså:

$$F_Y(t) = F_X\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

jämför $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\Longleftrightarrow X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

inte på föreläsn.

Exempel (2) (mellanförhör '84)

Anta: X s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$, $X \sim Tas(0,1)$

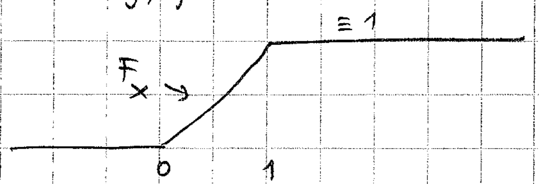
$Y = X^3$

Sök fördelningsfkt och frekvensfkt. till Y

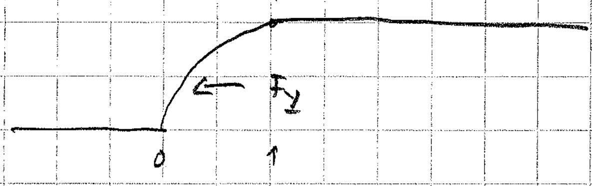
Lösn.

$g(x) = x^3$, $\quad g^{-1}(y) = y^{1/3}$ $\quad g, g^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f.-f. $F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ t, & 0 < t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$



$$F_Y(t) = F_X(t^{1/3}) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ t^{1/3}, & 0 < t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$$



frekvens funktion

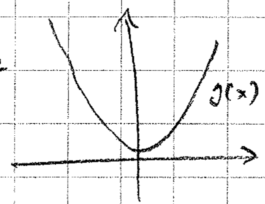
kom ihåg $f_Y(t) = F_Y'(t)$

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = \frac{d}{dt}\left(F_X(t^{1/3})\right) = \underbrace{F_X'(t^{1/3})} \cdot \frac{1}{3} \cdot t^{-2/3} = \begin{cases} \frac{1}{3} t^{-2/3}, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

sammansatt fkt $t \mapsto t^{1/3} \xrightarrow{F_X} F_X(t^{1/3})$ $\equiv 1$, $0<t<1$ annars $\equiv 0$

litet svårare (utanför fall A)

Exempel 2.29 anta $X \sim Tas(0,1)$, $Y = X^2$ $\quad g(x) = x^2$



Bestäm f-f. och frekvensfunktion av Y.

Lösn

$$P(\{\omega : 0 < X(\omega) < 1\}) = 1 \overset{Y(\omega) = X(\omega)^2}{\Longrightarrow} P(\{\omega : 0 < Y(\omega) < 1\}).$$

anta $0 < y < 1$

$$F_Y(y) = P(\{\omega : X(\omega)^2 \le y\}) = P(\{\omega : -\sqrt{y} \le X(\omega) \le \sqrt{y}\})$$

$$\underset{X(\omega) \ge 0}{=} P(\{\omega : 0 \le X(\omega) \le \sqrt{y}\}) = F_X(\sqrt{y}) \underset{X \sim Tas(0,1)}{=} \sqrt{y}$$

frekvensfkt. $f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{d}{dy}(\sqrt{y}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$, $\quad 0 < y < 1$

$f_Y(y) = 0$ annars.

12/2/2015

vidare exempel om f-f och frekvensfktn av transformerad s.v.

Exempel 2.30 Anta $X \sim N(0,1)$ och $Y = X^2$

Bestäm f-f. och frekvensfkt. till $Y = X^2$.

Lösn. om $y > 0 \Rightarrow$

f.-f. $F_Y(y) = P(\{\omega : X(\omega)^2 \le y\}) = P(\{\omega : -\sqrt{y} \le X(\omega) \le \sqrt{y}\}) =$

$$= P\left(\{\omega : X(\omega) \le \sqrt{y}\} \setminus \{\omega : X(\omega) < -\sqrt{y}\} \right)$$

$-\sqrt{y}$ $\quad$ $\sqrt{y}$

$$\overset{1.4}{=} P(X \le \sqrt{y}) - P(X < -\sqrt{y}) \overset{X \sim N(0,1)}{=} \Phi(\sqrt{y}) - \underbrace{\Phi(-\sqrt{y})}_{1-\Phi(\sqrt{y})} = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1.$$

$$y \le 0 \Rightarrow P(\{\omega : Y(\omega) \le y\}) \overset{X(\omega)^2 \ge 0}{=} 0. \quad \left(\text{om } y < 0 \Rightarrow \{\omega : X(\omega)^2 \le y\} = \emptyset\right).$$

frekvens fkt: $\quad y > 0 \Rightarrow$

sammansatt funktion $\quad y \mapsto \sqrt{y} \mapsto 2\Phi(\sqrt{y})$

$$f_{\underline{Y}}(y) = F'_{\underline{Y}}(y) = \frac{d}{dy}\left(2\Phi(\sqrt{y}) - 1\right) = 2\Phi'(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2}}, \quad y > 0.$$

$$f_{\underline{Y}}(y) = 0 \quad \text{om} \quad y \le 0.$$

1.11

(Inte 2015) Exempel (5) (mellan förhör '81) $\quad$ Anta: $X \sim \text{Exp}(1)$, $Z = (X-1)^2$

f.f. och frekvens fkt. till Z ?

Lösn. $\quad f_X(t) = 1 - e^{-t}, \ t > 0, \quad f_X(t) = 0, \ t \le 0 \quad \Rightarrow$

$$F_Z(t) = P\left((X-1)^2 \le t\right) = P\left(-\sqrt{t} \le X - 1 \le \sqrt{t}\right)$$

$$\overset{Ex.4}{=} P(X - 1 \le \sqrt{t}) - P(X - 1 < -\sqrt{t})$$

$$= P(X \le 1 + \sqrt{t}) - P(X < 1 - \sqrt{t}) = \underbrace{F_X(1+\sqrt{t})}_{1 - e^{-(1+\sqrt{t})}} - \underbrace{F_X(1-\sqrt{t})}_{\begin{cases} 1 - e^{-(1-\sqrt{t})}, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \ge 1. \end{cases}}$$

$$1 - \sqrt{t} > 0 \iff 0 < t < 1.$$

alltså

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ e^{-1+\sqrt{t}} - e^{-1-\sqrt{t}}, & 0 < t < 1 \\ 1 - e^{-1-\sqrt{t}}, & t \ge 1. \end{cases}$$

frekvens fkt. $\quad f_Z(t) = F'_Z(t) = \cdots$

3. Väntevärdet och andra kvantiteter för stokastiska variabler

väntevärde för allmänna s.v. ?

Låt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sl-rum.

2.2 : om $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diskret s.v. , $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ $\Rightarrow$

väntevärde $E(X) = \sum_k x_k \underbrace{P(X = x_k)}_{= p_k}$ (förutsatt $\sum_k |x_k| P(X = x_k) < \infty$)

där $p_k = P(X = x_k)$.

2.4 : om $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kontinuerligt fördelad, med frekvensfkt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

väntevärde $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$ (förutsatt $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx < \infty$).

(som oegentlig Riemann integral)

Problem väntevärde $E(X)$ för godtyckliga s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$?

dvs. $\{\omega : X(\omega) \le a\} \in \mathcal{F}$ för alla $a \in \mathbb{R}$

Definitionen förutsätter integration i sl-rum (senare i kurserna "Mått och integral", samt "Sannolikhetsteori"). Tekniskt är detta svårare att definiera:

Följande basegenskaper för väntevärdet kan tas som axiom på SL I.
för väntevärdet $X \mapsto E(X)$ för s.v. X (obs bör ha $E(X) \in \mathbb{R}$ alltid).

Sats 3.1 Väntevärdet $E(X)$ kan utsträckas till s.v.
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ så att följande egenskaper gäller:
Anta s.v. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ har väntevärden $E(X), E(Y) \in \mathbb{R}$.
Då gäller:

"linjär" (i) s.v. $c_1 X + c_2 Y$ har väntevärdet

$$E(\underbrace{c_1 X + c_2 Y}_{}) = c_1 E(X) + c_2 E(Y), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

summan $\omega \mapsto c_1 X(\omega) + c_2 Y(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$

"väntevärdet $X \mapsto E(X)$ linjär"

* (ii) om $X \perp\!\!\!\perp Y$ oberoende s.v $\Rightarrow$

$$E(X \cdot Y) = E(X)\, E(Y)$$

där produkt $(X \cdot Y)(\omega) = X(\omega) Y(\omega)$, $\omega \in \Omega$

ger samma som tidigare def

(iii) om X diskret s.v. , $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ $\Rightarrow$

$$E(X) = \sum_k x_k \, P(\{\omega : X(\omega) = x_k\})$$

om $\sum |x_k| P(X = x_k) < \infty$

om X kont. fördelad s.v. , f frekvensfkt. $\Rightarrow$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

(om $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx < \infty$)

(iv) om $X \sim Y$ likadant fördelade (dvs. fördelningsf. $F_X(t) = F_Y(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow$

$$E(X) = E(Y)$$

Beviset förbigås $\boxtimes$

OBS ① allmänna versioner av (i) och (ii) med induktion:

(i′) $$E\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i)$$ $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ s.v. $i = 1, \dots, n$

(ii′) om $\{X_1, \dots, X_n\}$ $\perp\!\!\!\perp$ oberoende familj av s.v $\Rightarrow$

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdots X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdots E(X_n)$$

② konstruktionen av väntevärdet $E(X)$ hör till "Mått och integral".
I själva verket
$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\, dP(\omega)$$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sl-rum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ s.v.

Första stegen av konstruktionen Steg 1 om $A \in \mathcal{F}$ händelse $\Rightarrow$ definiera $E(1_A) = P(A)$,

steg 2 om $X = \sum_{j=1}^{n} c_j 1_{A_j}$ linear kombination av indikatorfunktioner, med $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ då $i \neq j$ disjunkta

"linearitet" $\Rightarrow$ definiera
$$E(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j P(A_j).$$

konstruktion har flera steg (se. [T], s. 79).

□

konstruktionen ger följande vidare egenskaper

Sats 3.2 Anta $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sl-rum. Då gäller:

(i) $E(c) = c$, $c \in \mathbb{R}$ c är konstant funktion s.v. $c(\omega) = c$ $\forall \omega \in \Omega$

(ii) $E(1_A) = P(A)$, $A \in \mathcal{F}$ händelser, där $1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

(iii) om $X \le Y \Rightarrow E(X) \le E(Y)$ där $X \le Y$ betyder: $X(\omega) \le Y(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$.

(iv) s.v. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ har väntevärde $E(X)$ (som tal $\in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$

$$E(|X|) < \infty$$ där $\omega \mapsto |X|(\omega) = |X(\omega)|$, $\omega \in \Omega$.

Dessutom gäller: $$|E(X)| \le E(|X|)$$

(v) (strikt positivitet) om $X(\omega) \ge 0$ $\forall \omega \in \Omega$ och $E(X) = 0$ $\Big\} \Rightarrow X = 0$

i följande mening: $$P(\underbrace{\{\omega : X(\omega) = 0\}}_{\in \mathcal{F}}) = 1$$

⊠

Egenskapen

(*) om $X \perp\!\!\!\perp Y$ oberoende $\Rightarrow$ $E(X \cdot Y) = E(X)\,E(Y)$

är mycket viktig för SL. Vi härleder egenskapen (*) i specialfallet

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ diskreta s.v., med ändligt många värden.

2015: inte på föreläsningen

Exempel 13.3 anta $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ s.v.

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

Låt

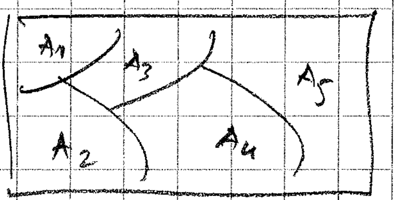
$$A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$B_j = \{\omega : Y(\omega) = y_j\}, \quad j = 1, \ldots, n$$

kapitel 2.6 $\Rightarrow$ $A_i, B_j \in \mathcal{F}$ händelser $\forall i, j$

$$\Rightarrow X = \sum_{i=1}^{m} x_i 1_{A_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} y_j 1_{B_j}$$, eftersom

$$\sum_{i=1}^{m} x_i 1_{A_i}(\omega) = x_i \quad \text{om } \omega \in A_i$$ (obs $A_i \cap A_j = \emptyset$, då $i \neq j$)



$$\Rightarrow XY = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i 1_{A_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j 1_{B_j}\right)$$

$$\overset{\text{ändliga}}{\underset{\text{summor}}{=}} \sum_i \sum_j x_i y_j \underbrace{1_{A_i} 1_{B_j}}_{\text{övning } = 1_{A_i \cap B_j}} = \sum_i \sum_j x_i y_j 1_{A_i \cap B_j}$$

där $\{A_i \cap B_j\}_{i,j}$ disjunkta mängder

2.6. $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow A_i \perp\!\!\!\perp B_j$ $\forall i, j$

Alltså:

$$E(XY) \overset{\text{ovan}}{=} \sum_i \sum_j x_i y_j P(A_i \cap B_j) = \sum_i \sum_j x_i y_j P(A_i) P(B_j)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i P(A_i)\right)}_{\text{ovan: } = E(X)} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j P(B_j)\right)}_{= E(Y)} = E(X)\,E(Y)$$

$\square$.

2-11

användbar olikhet för väntevärdet:

Markovs (eller Chebyshevs) olikhet: låt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sl-rum.

Anta: $\begin{cases} X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ s.v. så att} \\ X \geq 0 \quad (\text{dvs. } X(\omega) \geq 0 \;\forall \omega \in \Omega), \\ \text{och } X \text{ har väntevärde } E(X) \; (\in [0, \infty)). \end{cases}$

Då gäller:

$$P(\{\omega : X(\omega) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} E(X) \quad \text{för alla } a > 0.$$

Bevis: detta följer av Sats 3.2.(iii). Nämligen:

(*) $X \geq a\,1_{\{\omega: X(\omega) \geq a\}}$, dvs $X(\omega') \geq a\,1_{\{\omega: X(\omega)\geq a\}}(\omega')$ $\forall \omega' \in \Omega$

Orsak: om $\omega' \in \{\omega: X(\omega) \geq a\} \Rightarrow$ (*) är $X(\omega') \geq a = a \cdot 1_{\{\omega: X(\omega)\geq a\}}(\omega')$.

om $\omega' \notin \{\quad\} \Rightarrow$ (*) är $X(\omega') \geq 0$ OK.

Sats 3.2.(iii) $\Rightarrow$

$$E(X) \geq a\,E(1_{\{\omega: X(\omega)\geq a\}}) = a\,P(X \geq a)$$

$$\overset{a>0}{\Rightarrow} \quad P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E(X) \qquad \square.$$

Väntevärde för transformerad s.v.

$$\Omega \xrightarrow{X \text{ s.v.}} \mathbb{R} \xrightarrow[\text{kont. etc}]{g} \mathbb{R}$$

sammansatt s.v. $\omega \mapsto g(X(\omega))$, $\omega \in \Omega$

Fråga: väntevärdet för $g(X) = g \circ X$?

diskret / kont. fördelade fallet (specialfall)

Sats 3.4

(1) Anta: X diskret s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

f frekvensfkt (dvs. $f(x_k) = \underbrace{P(X = x_k)}_{\text{bet.} = P_k}$, $k = 1, 2, \ldots$)

$g: X(\Omega) \to \mathbb{R}$ (godtycklig) avbildning

Då har $g(X)$ väntevärde $\Leftrightarrow$

$$\sum_k |g(x_k)|\,f(x_k) < \infty \quad \text{och}$$

$$E(g(X)) = \sum_k g(x_k)\,f(x_k) = \sum_k g(x_k)\,P_k = \sum_k g(x_k)\,P(\{X = x_k\}).$$

Obs fallet $g(t) = t$ ger X själv

(2) Anta: X kont. fördelad s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$, frekvensfkt f,

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ~~Borel-funktion~~ (exempelvis, g kontinuerlig).

Då har $g(X)$ väntevärde $\Leftrightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,f(x)\,dx < \infty,$$

och

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx$$

fallet $g(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$ ger X

Beviset förbigås $\boxed{X}$

Exempel 3.5 $X: \Omega \to \mathbb{R}$ s.v., $X \sim \text{Tas}(a, b)$, $a < b$ likformigt fördelad

$$E(X^n) = ? \quad, n = 1, 2, \ldots$$

Lösn.: $X \sim \text{Tas}(a, b) \Rightarrow$ frekvensfkt. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

Satsen 3.4 $\Rightarrow$

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx = \int_a^b x^n \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \Big/_a^b \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$g(x) = x^n$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{n+1} \big(\underbrace{b^{n+1} - a^{n+1}}_{(b-a)(b^n + b^{n-1}a + \dots + ba^{n-1} + a^n)}\big)$$

$$= \frac{b^n + b^{n-1}a + \dots + ba^{n-1} + a^n}{n+1}, \quad n = 1, 2 \dots$$

$\square$.

3.2. Varians, standardavvikelse och kovarians

Ytterligare "mått" som beskriver stokastiska variabler $X: \Omega \to \mathbb{R}$

Anta: $X: \Omega \to \mathbb{R}$ s.v. med väntevärdet $\mu = E(X) \in \mathbb{R}$.

Def. Variansen till X är

$$\mathrm{Var}(X) = E\big((X-\mu)^2\big) \quad (\text{betecknas även } D^2(X) \text{ i [T]})$$

förutsatt att väntevärdet $E((X-\mu)^2)$ existerar (dvs. $< \infty$).

(s.v. $\omega \mapsto (X(\omega)-\mu)^2 = X(\omega)^2 - 2\mu X(\omega) + \mu^2$)

Standardavvikelsen (fi. hajonta) till X är

$$D(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{E\big((X-\mu)^2\big)}$$

intuition: s. avvikelsen $D(X)$ beskriver hur koncentrerad X:s värden $X(\omega)$ är omkring väntevärdet $\mu = E(X)$.

$D(X) = \sqrt{E((X-\mu)^2)}$ har bättre egenskaper än $E(|X-\mu|)$

OBS (Sats 3.4) transformationsformlerna $\Rightarrow$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_k (x_k - \mu)^2 P(X = x_k) \quad \text{om } X \text{ diskret s.v.}, \; X(\Omega) = \{x_1, x_2 \dots\},$$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \quad \text{om } X \text{ kont. fördelad med frekvensfkt. } f$$

användbar formel

Sats 3.6 X: s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$. Variansen $\mathrm{Var}(X)$ existerar (som tal $\in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$

$$E(X^2) < \infty, \text{ och}$$

$$(*) \qquad \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Bevis: om $E(X^2) < \infty \Rightarrow$ väntevärde $E(X)$ existerar (dvs. $E(|X|) < \infty$),

eftersom

$$|X| \le 1 + X^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{om } |X(\omega)| \le 1 \Rightarrow \text{OK} \\ \text{om } |X(\omega)| > 1 \Rightarrow |X(\omega)| \le |X(\omega)|^2 = X(\omega)^2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow E|X| \le E(1 + X^2) = 1 + E(X^2) < \infty.$$

$(X(\omega)-\mu)^2 = X(\omega)^2 - 2\mu X(\omega) + \mu^2 \Rightarrow$

väntevärdet linjärt

$$Var(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = E\left(X^2 - 2\mu X + \mu^2\right) = E(X^2) - 2\mu \underbrace{E(X)}_{=\mu} + \mu^2$$

$$= E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2. \qquad \square$$

Exempel (3.7 $\quad (\Omega, \mathcal{F}, P)$ sl-rum, $A \in \mathcal{F}$ händelse

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases} \quad \text{s.v.}$$

~~Bestäm variansen $Var(1_A)$ och standardavvikelse $D(1_A)$.~~

obs 1_A diskret s.v.

$1_A(\Omega) = \{0, 1\}$,

$\{1_A = 1\} = A$

$\{1_A = 0\} = A^c$

Lösn $\quad E(1_A) = P(A) \Rightarrow$

formel (*)

$$Var(1_A) = E\left((1_A - P(A))^2\right) = E(\underbrace{1_A^2}_{=1_A}) - (E(1_A))^2$$

$$= P(A) - P(A)^2 = P(A)\,[\underbrace{1 - P(A)}_{=P(A^c)}] = P(A)P(A^c)$$

$$\Rightarrow \quad D(1_A) = \sqrt{P(A)P(A^c)} \qquad \square.$$

18/2/2015

egenskaper för variansen / standarvvikelsen

Sats 3.8. Låt X och Y vara s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$. Då gäller:

(1) $\quad Var(X) = 0 \iff X$ väsentligen "konstant", dvs

$P(\{\omega : X(\omega) = \mu\}) = 1$ där $\mu = E(X)$.

(2) $\quad Var(aX+b) = a^2 Var(X), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ konstanter

s.v. $\omega \mapsto aX(\omega) + b, \ \omega \in \Omega$.

* (3) om $X \perp\!\!\!\perp Y$ oberoende s.v. $\Rightarrow$

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

obs egenskap som inte gäller för $E(|X-\mu|)$

2015 endast visa (3)

Bevis (1) om $\exists c \in \mathbb{R}$ så att $P(\{\omega : X(\omega) = c\}) = 1 \Rightarrow$

$E(X) = c \Rightarrow$

$Var(X) = E\left((X-c)^2\right) = 0$ (eftersom $P(\{\omega : |X(\omega) - c|^2 = 0\}) = 1$.)

Omvänt:

$$0 = D^2(X) = E\left((X-\mu)^2\right) \overset{3.1}{\underset{\text{sats}}{\Rightarrow}} P(\{\omega : X(\omega) = \mu\}) = 1.$$

dvs. $X = \mu$ "konstant"

(2) Lineariteten $\Rightarrow$

$$E(aX+b) = a\underbrace{E(X)}_{=\mu} + b = a\mu + b,$$

och

$$\big((aX+b)-(a\mu+b)\big)^2 = \big(a(X-\mu)\big)^2 = a^2(X-\mu)^2 \Rightarrow$$

$$\mathrm{Var}(aX+b) = E\big(a^2(X-\mu)^2\big) \underset{\text{lin.}}{=} a^2 E\big((X-\mu)^2\big) = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

(3) Låt $\mu_1 = E(X)$, $\mu_2 = E(Y)$ $\underset{\text{lin.}}{\Rightarrow}$ $E(X+Y) = E(X)+E(Y) = \mu_1+\mu_2$

och

$$\big((X+Y)-(\mu_1+\mu_2)\big)^2 = \big[(X-\mu_1)+(Y-\mu_2)\big]^2$$

$$= (X-\mu_1)^2 + 2(X-\mu_1)(Y-\mu_2) + (Y-\mu_2)^2$$

väntevärde $\Rightarrow$

$$\mathrm{Var}(X+Y) \overset{\text{linearit}}{=} \underbrace{E\big((X-\mu_1)^2\big)}_{\mathrm{Var}(X)} + \underbrace{E\big((Y-\mu_2)^2\big)}_{\mathrm{Var}(Y)} + 2\,\underbrace{E\big((X-\mu_1)(Y-\mu_2)\big)}$$

$$\overset{(*)}{=} E(X-\mu_1)\,E(Y-\mu_2) = 0$$

(*) $X \perp\!\!\!\perp Y \overset{\text{def}}{\Longrightarrow}$ $\qquad$ eftersom $E(X-\mu_1) = \underbrace{E(X)}_{=\mu_1} - \mu_1 = 0$ ...

$$X-\mu_1 \perp\!\!\!\perp Y-\mu_2 \Rightarrow E\{(X-\mu_1)(Y-\mu_2)\} = E(X-\mu_1)\,E(Y-\mu_2)$$

(påminn.: $\{X\le a\} \perp\!\!\!\perp \{Y\le b\}$ $\forall a,b$ $\Rightarrow$ också $\underbrace{\{X-\mu_1\le a\}}_{=\{X\le a+\mu_1\}} \perp\!\!\!\perp \underbrace{\{Y-\mu_2\le b\}}_{=\{Y\le b+\mu_2\}}$. !) $\square$.

viktigt exempel (senare: centrala gränsvärdessatsen och stora talens lag!)

* Exempel 3.9 anta: $\{X_1,\dots,X_n\} \perp\!\!\!\perp$ oberoende s.v. $\Omega\to\mathbb{R}$,

och $E(X_j)=\mu$, $\mathrm{Var}(X_j)=\sigma^2$ $\forall j=1,\dots,n$ (samma väntevärde, varians)

s. 96 efter kovariansformel

Låt $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ $\qquad$ aritmetiskt medeltal av s.v. $X_1,\dots,X_n$

(dvs. $\omega \mapsto \frac{1}{n}(X_1(\omega)+\dots+X_n(\omega))$ för $\omega\in\Omega$)

Beräkna väntevärdet $E(\overline{X})$, variansen $\mathrm{Var}(\overline{X})$

Lösn. Lineariteten $\Rightarrow$

$$E(\overline{X}) = E\Big(\frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n)\Big) = \frac{1}{n}\Big(\underbrace{E(X_1)}_{=\mu}+\dots+\underbrace{E(X_n)}_{=\mu}\Big) = \frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}\mu = \mu.$$

$\{X_1,\dots,X_n\} \perp\!\!\!\perp$ $\overset{\text{allmän}}{\Longrightarrow}$ version av 3.8.(3) och 3.8.(2)

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_1+X_2+\dots+X_n) = \frac{1}{n^2}\Big(\underbrace{\mathrm{Var}(X_1)}_{=\sigma^2}+\dots+\underbrace{\mathrm{Var}(X_n)}_{=\sigma^2}\Big)$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \text{s. avvikelsen } D(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Speciellt: $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\qquad\square$.

Lista på varians / stand. avvikelse för kända fördelningar

Sats 3.10 s.v. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ given

- om $X \sim Bin(n,p) \Rightarrow Var(X) = npq$
- $X \sim Hyperg(N,K,n) \Rightarrow Var(X) = n \cdot \frac{K}{N} \cdot \frac{N-K}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$
- $X \sim Geom(p) \Rightarrow Var(X) = \frac{q}{p^2}$
- $X \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow Var(X) = \lambda$

diskreta s.v.

- $X \sim Tas(a,b) \Rightarrow Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow Var(X) = \sigma^2$ (obs "förklarar" σ^2 i $N(\mu,\sigma^2)$)

kontin. fördelade s.v.

Bevis varians av diskreta s.v. $\rightsquigarrow$ om $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$, så

$$Var(X) = \sum_k (x_k - \mu)^2 p_k \quad , \text{där } p_k = P(\{\omega : X(\omega) = x_k\})$$

$\rightsquigarrow$ summor av typ $\sum_k x_k^2 p_k$ "svåra" att beräkna

kan undvikas efter mera teori (senare, kapitel 3.2).

$$X \sim Tas(0,1) \Rightarrow E(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \, dx = \frac{1}{2} \quad , \quad E(X^2) \overset{Ex. ②}{=} \int_0^1 x^2 \cdot 1 \, dx = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

allmänna $X \sim Tas(a,b)$: använd $X = (b-a)Y + b$, där $\begin{cases} Y \perp\!\!\!\perp b \\ Y \sim Tas(0,1), \end{cases}$ 3.8.(2) och

inte 2015 på föreläsn

$$X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow E(X^2) = \lambda \int_0^\infty \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^{-\lambda x}}_{v'} dx \underset{\text{integr}}{\overset{\text{partiell}}{=}} \lambda \underbrace{\Big/_0^\infty -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x}}_{=0} + 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx$$

$$\overset{\text{partiell}}{=} -\frac{2}{\lambda} \Big/_0^\infty x e^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda^2} \Big/_0^\infty e^{-\lambda x} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) \overset{(*)}{=} E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

övn 6.2

$$X \sim N(0,1) \qquad E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad \text{partiell integr. etc.}$$

allmän $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ genom $X = \sigma Y + \mu$, $Y \sim N(0,1)$

$\boxtimes$ 3.11.

Chebyshevs olikhet   Anta $X : \Omega \to \mathbb{R}$ s.v., med väntevärdet

$E(X) = \mu$ och variansen $Var(X) = \sigma^2$.

Obs kombination $k \cdot \sigma$ där $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Påst: Om $\sigma > 0$ så gäller

(**) $$P(\{\omega : |X(\omega) - \mu| \geq k\sigma\}) \leq \frac{1}{k^2}$$ för varje $k > 0$.

Bevis $$P(\{\omega : |X(\omega)-\mu| \geq k\sigma\}) \overset{\text{tal} \geq 0}{=} P(\{\omega : |X(\omega)-\mu|^2 \geq k^2\sigma^2\})$$

$$\underset{\text{olikhet}}{\overset{\text{Markovs}}{\leq}} \frac{1}{k^2\sigma^2} E(|X-\mu|^2) = \frac{Var(X)}{k^2\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}$$

s.v. $|X-\mu|^2 \geq 0$ (Obs gäller inte om $\sigma = 0$, dvs $X = \mu$). $\square$

Inte 2015

Test: $X \sim N(0,1)$, $k = 2$, $\sigma^2 = 1$

$$P(\{\omega : |X(\omega)| \geq 2\}) = P(\{\omega : X(\omega) \geq 2\} \cup \{\omega : X(\omega) \leq -2\})$$

$$\overset{\text{disjunkt}}{=} P(X \geq 2) + P(X \leq -2)$$

-2 2

$$= 1 - P(X \leq 2) + \underbrace{P(X \leq -2)}_{\Phi(-2) = 1 - \Phi(2)} = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(2) = 2(1 - \Phi(2))$$

$$\cong 2(1 - 0.977) = 0.046$$

där $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Chebyshev (**) $\Rightarrow$ med $E(X) = 0$, $Var(X) = 1$:

$$P(|X| \geq 2) \leq \frac{1}{4} = 0.25$$

(**) vanligen inte skarp

---

en annan olikhet

Schwarz' olikhet   Anta X, Y s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$ så att

$E(X^2) < \infty$, $E(Y^2) < \infty$.

Då gäller:

(S) $$|E(XY)| \leq \underbrace{(E(X^2))^{1/2}}_{= \sqrt{E(X^2)}} \underbrace{(E(Y^2))^{1/2}}_{= \sqrt{E(Y^2)}},$$

där $XY : \omega \mapsto X(\omega)Y(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$.

Speciellt: $E(|XY|) < \infty$ beviset förbigås $\boxtimes$

Inte 2015

~~OBS~~ likhet "=" i (S) $\iff \exists\, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ eller $b \neq 0$, med

$P(\{\omega : aX(\omega) + bY(\omega) = 0\}) = 1$

Anta s.v. X och $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ som har väntevärden $\mathbb{E}(X) = \mu_1$, $\mathbb{E}(Y) = \mu_2$.

Def: kovariansen till X och Y är

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \overset{\text{def.}}{=} \mathbb{E}\big((X-\mu_1)(Y-\mu_2)\big) = \mathbb{E}(XY - \mu_2 X - \mu_1 Y + \mu_1\mu_2)$$

$$\overset{\text{lin}}{=} \mathbb{E}(X\cdot Y) - \mu_2 \underbrace{\mathbb{E}(X)}_{=\mu_1} - \mu_1 \underbrace{\mathbb{E}(Y)}_{=\mu_2} + \mu_1\mu_2$$

$$\overset{\text{altern. def.}}{=} \mathbb{E}(X\cdot Y) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y).$$

förutsatt att $\omega \mapsto X(\omega)Y(\omega)$ har väntevärde (exempelvis (8): om $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$).

Obs ① $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{E}((X-\mu)^2) = \mathrm{Var}(X)$, med $\mu = \mathbb{E}(X)$.

② om $X \perp\!\!\!\perp Y$ oberoende s.v. på Ω, så är

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \underbrace{\mathbb{E}(X\cdot Y)}_{\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)} - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = 0.$$

Varning "$\Longleftarrow$" gäller inte

egenskaper och samband med $\mathrm{Var}(\cdot)$.

Sats 3.11 anta s.v. $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ har ändlig varians. Då gäller:

$$(*) \quad \mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

allmänt om $X_j : \Omega \to \mathbb{R}$ s.v. $\forall j = 1,\dots,n$, som har ändlig varians $\Rightarrow$

$$(**) \quad \mathrm{Var}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^n c_j X_j}\Big) = \sum_{j=1}^n c_j^2 \mathrm{Var}(X_j) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} c_i c_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

linjär kombin. $\omega \mapsto \sum_{j=1}^n c_j X_j(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$

Summa över par (i,j) med $i<j$

Bevis av $(*)$

$$\mathrm{Var}(X+Y) \overset{\text{tidigare}}{=} \mathbb{E}((X-\mu_1)^2) + \mathbb{E}((Y-\mu_2)^2) + 2\,\mathbb{E}\big((X-\mu_1)(Y-\mu_2)\big)$$

(Bevis av 3.8.(3))

$$\overset{\text{def av Cov}(\cdot)}{=} \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

beviset av $(**)$: allmän version av detta

□

observation (ovan) om $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \Rightarrow$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

Sats 3.11 kan användas till att beräkna vissa väntevärden och varianser

Låt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sl-rum, $A \in \mathcal{F}$ händelse (dvs $A \subset \Omega$).

indikatorfunktionen till A är $1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{om } \omega \in A \\ 0, & \text{om } \omega \notin A \end{cases}$.

Påminnelse
* $E(1_A) = P(A)$
* variansen $Var(1_A) \overset{3.7}{=} P(A)P(A^c)$
* $1_A \perp\!\!\!\perp 1_B$ oberoende s.v. $\iff$ $A \perp\!\!\!\perp B$ oberoende händelser (med $A, B \in \mathcal{F}$).

orsak $\{1_A \leq u\} = \begin{cases} \emptyset & \text{om } u < 0 \\ A^c & \text{om } 0 \leq u < 1 \\ \Omega & \text{om } \end{cases}$

Indikatorfunktioner kan användas till att beräkna $E(X)$ och $Var(X)$.

Exempel 3.12 Låt $X \sim Bin(n,p)$. Då är

$$E(X) = np \quad \text{och} \quad Var(X) = npq, \quad \text{med } p \in (0,1), \ q = 1-p.$$

Kommentar enligt def är $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \ldots$?? etc

Lösn s.v. $X \sim Bin(n,p)$ beskriver n oberoende upprepningar, där händelse A med sl $P(A) = p$ inträffar eller inte och

$P(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ avser: A inträffar exakt k ggr.

Låt A_j = händelse A inträffar vid j:s försök $\Rightarrow$ $P(A_j) = P(A) = p$, $\forall j = 1, \ldots, n$

Betrakta $X = \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}$ $\Rightarrow$ $X = \#$ ggr A inträffar i n ober. försök (för $\omega \in \Omega$)

linearitet $\Rightarrow$

vv $E(X) = E\left(\sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}\right) \overset{\text{lin.}}{=} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{E(1_{A_j})}_{P(A_j) = p} = np.$

$A_i \perp\!\!\!\perp A_j$ då $i \neq j$ (oberoende försök!) $\Rightarrow$ $Cov(1_{A_i}, 1_{A_j}) = 0$ $\forall i \neq j$

Sats 3.11, formel (**) $\Rightarrow$

$$Var(X) = Var\left(\sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}\right) \overset{(**)}{=} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{Var(1_{A_j})}_{= p \cdot (1-p) \ \forall j} + 2 \sum_{i<j} \underbrace{Cov(1_{A_i}, 1_{A_j})}_{= 0 \ \forall i \neq j}$$

$$= np(1-p) = n \cdot p \cdot q$$

$\square$

(Kommentar 2: $Var(X)$ kräver enligt def att beräkna $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ etc..).

Obs $E(X)$, $Var(X)$ beror endast på fördelningen av X $\Rightarrow$ oavsett OF modell för $X \sim Bin(n,p)$

Exempel $X \sim N(0,1)$ normal fördelad

inte 2015

$P(X \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$, $P(X \geq 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$

(där $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$) $\Rightarrow$ medianen $m(X) = \frac{1}{2}$

allmänt: p-fraktil till X $(0 < p < 1)$, se [T], s. 89-90.

3.3. De stora talens lag

Låt $X_1, \dots, X_n$ s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ betrakta aritmetiska medeltalet

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$$ som s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$ (följd $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots$ etc)

Problem beskriv hur medeltalet $\overline{X}_n$ uppför sig då (antalet termer) $n \to \infty$?

Svaga formen av de stora talens lag (STL)

Anta $X_1, X_2, \dots$ följd av s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$, dvs X_j s.v. $\Omega \to \mathbb{R}$ $\forall j \in \mathbb{N}$, så att

- $\{X_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ $\perp\!\!\!\perp$ oberoende familj: detta avser att $\{X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_k}\}$ $\perp\!\!\!\perp$ oberoende familj för varje $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k$, $k = 2, 3, \dots$
- $E(X_j) = \mu$ $\forall j$
- $\mathrm{var}(X_j) = \sigma^2$ $\forall j$

$\}$ X_j har samma väntevärde och varians $\forall j \in \mathbb{N}$

Då gäller för medeltalet $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$ följande: (OBS följd, beror av n):

för varje fixerat $\varepsilon > 0$ är

$$(*) \qquad P(\{\omega : |\overline{X}_n(\omega) - \mu| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

(begrepp: $(*)$ säger att följden av s.v. $\overline{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu$ konvergerar i sannolikhet till μ).

Bevis Exempel 3.9/3.2 ($\{X_1, \dots, X_n\}$ $\perp\!\!\!\perp$ oberoende) $\Rightarrow$

$$E(\overline{X}_n) = \mu, \quad \mathrm{var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathrm{var}(X_j)}_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

fall ① om $\sigma = 0$ $\Rightarrow$ $\mathrm{var}(\overline{X}_n) = 0 \overset{3.2}{\Rightarrow} \overline{X}_n = \mu$ "konstant" $\forall n$

$\Rightarrow$ $(*)$ klar

fall 2 om $\sigma > 0$ (väsentliga fallet):

Chebyshevs olikhet /3.2

$$(*)\ P(|Y| \geq k \cdot \sigma) \leq \frac{1}{k^2}, \quad k > 0$$
där $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y)$

$\Rightarrow$

$$P(\{\omega : |\bar{X}_n(\omega) - \mu| \geq \varepsilon\}) = P(\{\omega : |\bar{X}_n(\omega) - \mu| \geq \underbrace{\varepsilon \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma}}_{k} \underbrace{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}_{D(\bar{X}_n)}\})$$

$$\underset{(*)}{\overset{\text{Chebyshev}}{\leq}} \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \left(\text{där } \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} > 0 \text{ konstant}\right)$$

$\square$.

* Korollarium 3.13 (Bernoullis sats)

Anta A händelse i försök, $P(A) = p$.

Z_n = antalet ggr A inträffar i n oberoende upprepningar.

Då gäller för alla fixerade $\varepsilon > 0$:

$$\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| < \varepsilon \Leftrightarrow p - \varepsilon < \frac{Z_n}{n} < p + \varepsilon$$

$$\text{SL} \quad P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

dvs.
$$P\left(\left\{\omega : p - \varepsilon < \frac{Z_n}{n} < p + \varepsilon\right\}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \quad \left(\text{komplement-händelsen}\right).$$

Bevis: låt A_j = händelsen A inträffar i j:s försök

$$Z_n = \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j} \quad \text{antalet ggr } A \text{ inträffar (vid } n \text{ oberoende försök)}$$

$\{A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}\}$ II oberoende upprepningar $\forall\, j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, $k = 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow \{1_{A_j} \mid j \in \mathbb{N}\}$ oberoende familj

välj $X_j = 1_{A_j}$ i STL $\xrightarrow{\text{beviset}}$

$$P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

där $\sigma^2 = \mathrm{Var}(1_{A_j}) = P(A_j) P(A_j^c) = p(1-p) \quad \forall j = 1, 2, \ldots$

$\square$.

OBS ① Bernoullis sats berör frekvenstolkningen av SL:

n oberoende upprepningar (och $P(A_j) = p$ konstant) $\Rightarrow$

proportionen (= "frekvensen")
$$\frac{\text{antalet ggr } A \text{ inträffar}}{n} \longrightarrow p \quad (\text{då } n \to \infty)$$

(2.) STL gäller under svagare antaganden: räcker anta att (102)

o kovariansen $Cov(X_i, X_j) = 0$, $i \neq j$ $\quad (X_i \perp\!\!\!\perp X_j \Rightarrow Cov(X_i, X_j) = 0)$

o $\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} Var(X_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad$ ($\approx$ samma bevis + variansformel / kovarianssatsen)

(3.) Starka formen av STL:

där $\mu = E(X_j)$ $\forall j$

$$P\left(\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n(\omega) = \mu\right\}\right) = 1$$

dvs. $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$ konvergerar nästan säkert (så) (nästan överallt) (mått-teori)

Exempel 3.14 $\quad$ Anta: $P(A) = \frac{1}{2}$ (exempel: A = krona i myntkast) $\quad$ 9.11

1000 oberoende upprepningar av försöket

Fråga: Är

$= $ tolka som 401 – 599 ggr

så $P(A \text{ inträffar mellan } 400-600 \text{ ggr}) > 0.97$?

Lösn. STL / Bernoulli 3.13: variansen $\sigma^2 = Var(1_{A_j}) = P(A)P(A^c) = \frac{1}{4}$

$n = 1000$ $\quad Z_{1000} = \sum_{j=1}^{1000} 1_{A_j}$, där A_j = A inträffar i j:s försök, $j = 1, \dots, 1000$.

Då gäller:

$$P(400 < \underbrace{\#\text{ggr } A \text{ inträffar}}_{= Z_{1000}} < 600) = P(400 < Z_{1000} < 600)$$

$$= P(-100 < Z_{1000} - \underbrace{500}_{1000\cdot\frac{1}{2}} < 100) = P\left(\left|Z_{1000} - 1000\cdot\tfrac{1}{2}\right| < 100\right)$$

$$= P\left(\left|\frac{Z_{1000}}{1000} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10}\right)$$

STL uppskattning $\leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n}$ med $\sigma^2 = \frac{1}{4}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $n = 1000$

komplementhändelsen

STL beviset

$$P\left(\left|\frac{Z_{1000}}{1000} - \frac{1}{2}\right| \geq \underbrace{\frac{1}{10}}_{=\varepsilon}\right) \leq \frac{\sigma^2}{\left(\frac{1}{10}\right)^2}\cdot\frac{1}{1000} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{40} = 0.025$$

≤ 0.025

$$\Rightarrow P\left(\left|\frac{Z_{1000}}{1000} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10}\right) = 1 - P\left(\left|\frac{Z_{1000}}{1000} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{10}\right)$$

$$\geq 1 - 0.025 = 0.975 > 0.97. \quad \square$$

19/2/2015

Exakta värdet: $Z_{1000} \sim Bin(1000, \frac{1}{2}) \Rightarrow P(Z_{1000} = j) = \binom{1000}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{1000-j} = \binom{1000}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$

$$P(400 < Z_{1000} < 600) = \sum_{j=401}^{599} j\, p_j = \sum_{j=401}^{599} j\binom{1000}{j}\cdot\frac{1}{2^{1000}} = ?$$